



Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles à roues

Benoît Thuilot

► To cite this version:

Benoît Thuilot. Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles à roues. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995. Français. NNT : 1995ENMP0603 . pastel-00838914

HAL Id: pastel-00838914

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00838914>

Submitted on 26 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Benoit THUILOT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité

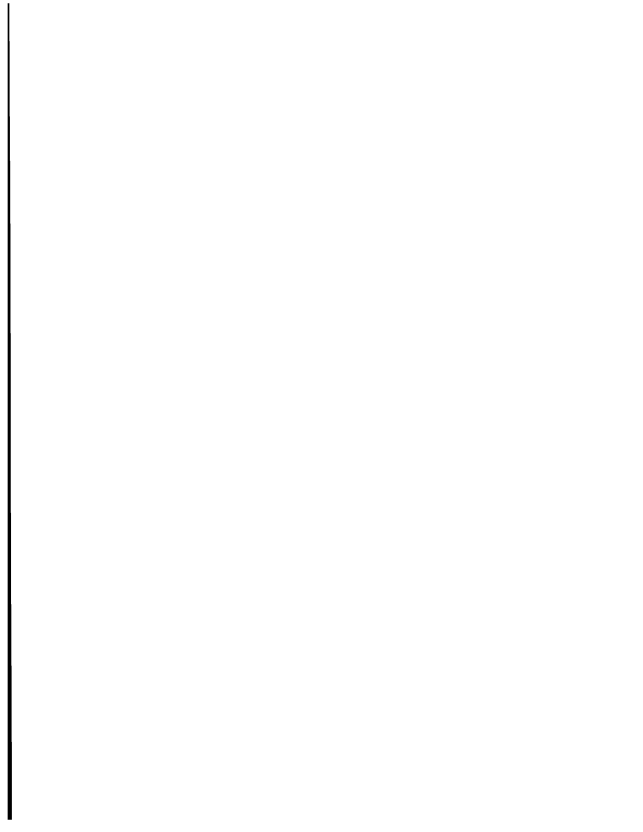
MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse .

**CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION
ET À LA COMMANDE DE ROBOTS
MOBILES À ROUES**

soutenue le 5 décembre 1995 devant le jury composé de :

M.	Guy CAMPION	Président
MM.	Dominique MEIZEL Claude SAMSON	Rapporteurs
Mme	Brigitte d'ANDRÉA-NOVEL	Examineurs
MM.	Carlos CANUDAS DE WIT Alain MICAELLI	



Résumé

Cette thèse adresse le problème suivant : soit un robot mobile à roues équipé de capteurs, supposés parfaits, renvoyant en temps réel sa localisation. Notre objectif est de construire des lois de commande permettant à ce système de se déplacer de façon autonome.

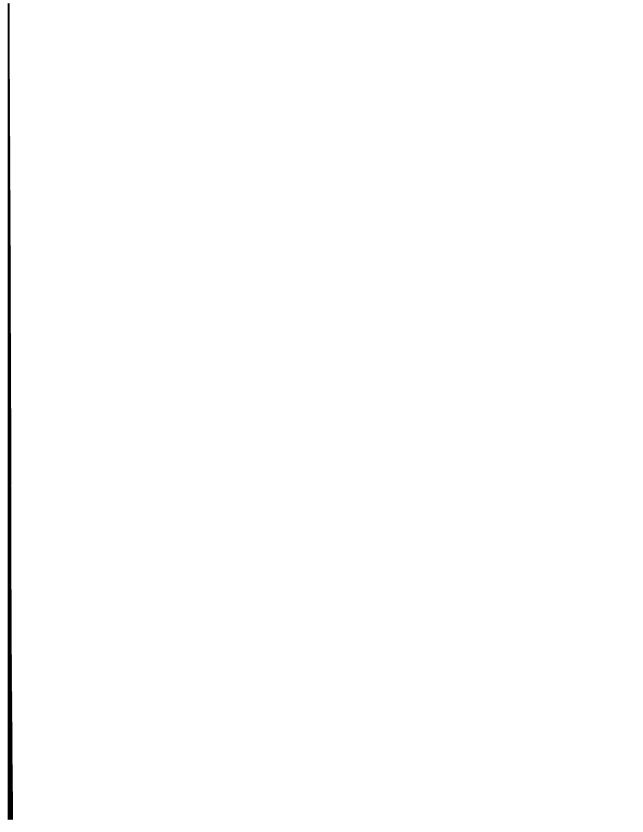
Nous avons dans un premier temps supposé que les roues roulent sans glisser sur le sol. Ceci est réaliste à vitesse modérée et sur des terrains de bonne adhérence. Les possibilités d'évolution des robots étant alors contraintes, ces systèmes sont clairement non-holonomes.

Leur modélisation est détaillée. Elle montre que, dans l'optique de la synthèse de lois de commande, l'ensemble des robots mobiles à roues constitue 5 classes d'équivalence.

La poursuite d'une trajectoire mobile et la stabilisation sur une configuration de repos sont, pour les systèmes non-holonomes, 2 problèmes distincts. Les solutions classiques peuvent être utilisées pour 4 classes de robots. Celle regroupant les robots équipés de plusieurs roues commandées en orientation et en rotation présente une difficulté : le modèle de ces systèmes comporte des singularités. Nous avons construit, pour la poursuite, des lois de linéarisation par bouclage d'état dynamique, et pour la stabilisation, des lois de bouclage de l'état et du temps, qui garantissent que ces robots ne passent pas par leurs singularités. Enfin, pour la poursuite de trajectoires mobiles se terminant par une configuration de repos, nous avons proposé un schéma de commande hybride exploitant ces lois. Indépendamment, nous avons aussi analysé le taux de convergence de bouclages de l'état et du temps.

Afin d'aborder la commande de robots à des vitesses élevées et/ou avec une mauvaise adhérence, nous avons dans un second temps relâché l'hypothèse de non-glissement. Une seconde modélisation, exploitant la description du contact d'un pneumatique avec le sol, est proposée. Celle-ci étant indéfinie à vitesse nulle, seule la poursuite d'une trajectoire mobile est envisagée. Nous avons proposé des lois de linéarisation partielle par bouclage d'état statique, et un schéma adaptatif afin qu'elles soient robustes pour les conditions d'adhérence.

Mots-clés · Robot mobile à roues, systèmes non-holonomes, glissement, modélisation, commande non-linéaire, linéarisation exacte, bouclage de l'état et du temps, singularités.



Abstract

Modelisation and control of wheeled mobile robots

This dissertation addresses the following problem : given a wheeled mobile robot equipped with sensors, considered as perfect, which on-line provide it with its localization. Our aim is to derive feedback laws which allow it to move around in an autonomous way.

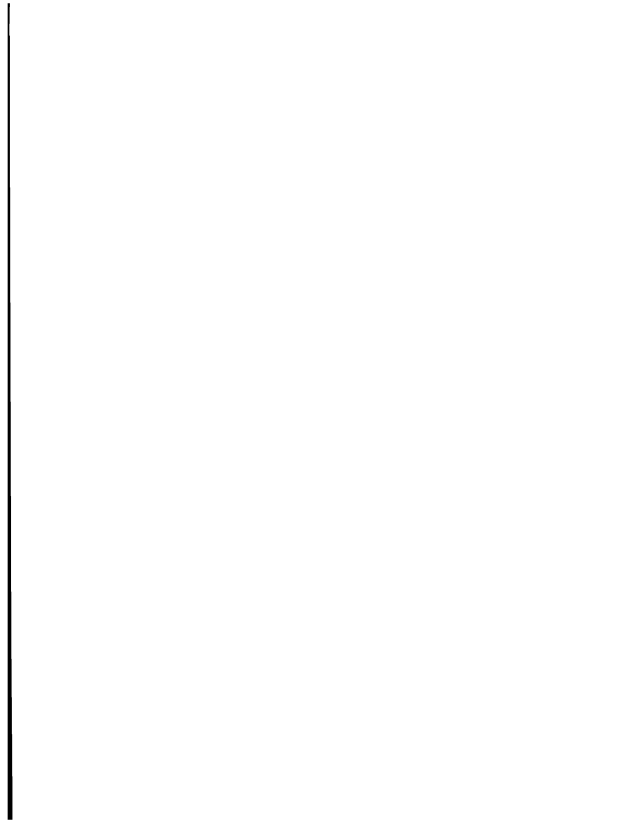
We have first assumed that the robot wheels do not slip on the ground. This is realistic at slow velocities and on grounds with good grip conditions. This assumption imposes that robots cannot move in all directions. Therefore, they are clearly nonholonomic systems.

Their modeling is detailed. It shows that, in case control is the only concern, all wheeled mobile robots can be classified into 5 types.

The tracking of a moving reference and the stabilization to a rest configuration are 2 distinct problems for nonholonomic systems. The solutions proposed in the literature may be used to control 4 types of robots. The other one, which gathers robots equipped with several wheels controlled both in orientation and rotation, presents a difficulty. Their model encloses singularities. We have proposed, for the tracking, dynamic feedback linearizing laws, and for the stabilization, time-varying feedback laws, which ensure that robots do not meet their singularities. Finally, for the tracking of a moving reference ended by a rest configuration, we have proposed a hybrid scheme combining these laws. Independently, we have also analysed the convergence rate of time-varying feedback laws.

In order to control wheeled mobile robots at higher velocities and/or on grounds with bad grip conditions, we have, as a second step, relaxed the non-sliding assumptions. A second model is proposed, relying on the description of the contact type-ground. Since it is undefined when the velocity is zero, we have focused on the tracking of a moving reference. We have proposed static feedback partially linearizing laws, and an adaptive scheme in order that these laws are robust with respect to grip conditions.

Keywords : Wheeled mobile robots, nonholonomic systems, sliding, modeling, nonlinear control, exact linearization, time-varying feedback laws, singularities.



Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à Brigitte d'Andréa-Novel, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris, et Alain Micaelli, Responsable du Laboratoire d'Automatique et de Commande du C.E.A.-Fontenay-aux-Roses, qui ont tous deux encadré et encouragé ce travail.

Alain Micaelli a été l'initiateur de cette thèse. Son approche, parfois atypique, des problèmes de commande fut particulièrement riche d'enseignements. Ses considérations physiques ont éclairé fort judicieusement ce travail a priori théorique. Je lui dois enfin un environnement technique et matériel (au sein du C.E.A.) qui fut toujours idéal.

Brigitte d'Andréa-Novel a été une directrice de thèse constamment disponible. Ses conseils, toujours précis et pertinents, ont jalonné ce travail. Sa rigueur scientifique fut pour moi une grande joie et un exemple.

J'ai enfin beaucoup goûté leur gentillesse, qui ne s'est jamais démentie, leur patience, que j'ai parfois mise à rude épreuve, et leur passion pour la Recherche qui fut si communicative. Ce travail en commun fut pour moi à la fois un réel plaisir et une remarquable formation.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Guy Campion et Georges Bastin, Professeurs à l'Université de Louvain-la-Neuve, et Jean-Baptiste Pomet, Chargé de Recherches à l'INRIA-Sophia-Antipolis : leur encadrement amical mais exigeant, à l'occasion d'un séjour de D.E.A., et leur enthousiasme m'ont permis d'aborder et d'apprécier vivement le domaine de la Recherche. J'ai retiré également de ce séjour de nombreux repères et outils qui me furent précieux au cours de ce travail, de même que plusieurs pistes de recherche, développées ici. Par conséquent, c'est pour moi une très grande joie que Guy Campion ait accepté de présider ce jury.

Je remercie très sincèrement Dominique Meizel, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, et Claude Samson, Directeur de Recherches à l'INRIA-Sophia-Antipolis, d'avoir bien voulu être rapporteurs, et Carlos Canudas de Wit, Chargé de Recherches au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, d'avoir accepté de participer à ce jury. J'ai suivi avec le plus grand intérêt leurs publications, et certaines furent pour moi une grande source d'inspiration. Aussi je suis très honoré de l'attention qu'ils ont montré pour ce travail.

Je tiens à remercier Yann Delmas et Pierre-Olivier Vandanjon, mes collègues thésards du C.E.A. Leurs remarques judicieuses et leurs commentaires sincères m'ont beaucoup aidé. Leur disponibilité et leur esprit d'entraide m'ont permis de ne jamais désespérer. J'espère avoir l'occasion de faire encore de nombreuses courses avec eux.

Je remercie également Eric Sachot pour notre collaboration sur la commande en présence de glissement fut brève, mais particulièrement constructive et en tous points passionnante.

Je remercie aussi Fadi Boustany et William Leroquais avec qui j'ai partagé les plages horaires de notre directrice de thèse. Leurs conseils pertinents, précis et exigeants furent une aide constante et un réconfort. Ce fut pour moi une grande joie d'avoir pu travailler et discuter avec eux.

Je tiens à remercier aussi Laurent ElGhaoui qui m'a toujours renouvelé sa confiance pour diriger différents cours à l'E.N.S.T.A. : cette expérience pédagogique fut pour moi excessivement enrichissante. Je le remercie également, ainsi que Jean-Pierre Folcher et Gérard Scorletti, pour l'ensemble des discussions fructueuses et amicales échangées lors de mon séjour à l'E.N.S.T.A. et pour leur participation active à la réunion de quelques références bibliographiques clés.

J'adresse également mes remerciements à Stéphane Morin et Pierre Carpentier qui, au C.E.A. ou au C.A.S., ne m'ont jamais laissé sans solution face à un avatar informatique. Leur aide me fut précieuse.

Je remercie aussi l'ensemble des secrétaires du C.E.A. et du C.A.S. Elles ont toujours répondu avec efficacité et beaucoup de gentillesse à toutes mes requêtes, même lorsque je les prenais au dépourvu. Leur concours me fut fort utile.

Je remercie plus généralement l'ensemble des agents et thésards du C.E.A., et l'ensemble des permanents et thésards du C.A.S. pour leurs conseils, leurs remarques ou leurs encouragements. Ceux-ci furent toujours appréciés.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui me sont proches : par leur compréhension pour le temps que j'ai consacré à ma thèse, par leurs encouragements sans cesse renouvelés, ce travail leur doit aussi beaucoup.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Présentation du travail	1
1.2	Motivations pour l'étude de ce problème	2
1.3	Contexte de ce travail	3
1.4	Plan du mémoire	4
1.5	Contributions de la thèse	5
1.5.1	Modélisation des robots mobiles	5
1.5.2	Commande des robots mobiles	6
2	Modélisation sous l'hypothèse d'un roulement pur sans glissement	9
2.1	Hypothèses de modélisation	10
2.2	Description d'un robot mobile	13
2.2.1	Coordonnées généralisées décrivant le châssis d'un robot	14
2.2.2	Coordonnées généralisées décrivant les roues	15
2.2.2.a	Roues fixes	16
2.2.2.b	Roues directrices	17
2.2.2.c	Roues désaxées	17
2.2.2.d	Roues omnidirectionnelles	20
2.2.2.e	Description d'un ensemble de roues	22
2.3	Modélisation d'un robot mobile quelconque	23
2.3.1	Expression de la vitesse du point de contact d'une roue avec le sol en fonction des coordonnées généralisées	23
2.3.2	Modèle cinématique	28
2.3.2.a	Construction du modèle cinématique d'un robot mobile quelconque	28
2.3.2.b	Mise en évidence de cinq classes de robots mobiles	34
2.3.3	Modèle dynamique	48
2.3.3.a	Equations d'Euler-Lagrange pour un robot mobile à roues	49
2.3.3.b	Représentation d'état	52
2.3.3.c	Représentation d'état lorsque les paramètres inertiels sont connus	54
2.4	Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices	56
2.4.1	Orientations des roues directrices pouvant conduire à une saturation des actionneurs	57
2.4.2	Paramétrisation des orientations non-singulières des roues directrices	61

2.4.3	Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1	66
3	Modélisation en présence de glissement	73
3.1	Modélisation des forces de contact pneumatique sol	74
3.1.1	Phénomènes physiques	76
3.1.1.a	Force longitudinale F_x	76
3.1.1.b	Force transversale F_y	78
3.1.1.c	Couple d'auto-alignement C_a	80
3.1.2	Mise en équations des forces de contact pneumatique-sol cas où la dérive est nulle, puis cas où le glissement est nul	80
3.1.2.a	Force longitudinale \tilde{F}_x à dérive nulle	81
3.1.2.b	Force transversale \tilde{F}_y à glissement nul	91
3.1.2.c	Couple d'auto-alignement \tilde{C}_a à glissement nul	98
3.1.3	Mise en équation des forces de contact cas général (présence simultanée de dérive et de glissement)	101
3.1.3.a	Expression de F_x et F_y dans le cas général	102
3.1.3.b	Expression de C_a dans le cas général	113
3.1.4	Lien entre les modèles proposés et l'expression des efforts roues-sol dans le cas roulement pur sans glissement	116
3.2	Modèles de robots mobiles	118
3.2.1	Perturbation singulière du modèle générique	118
3.2.2	Description des principaux robots mobiles étudiés dans la littérature et des motivations des auteurs	120
3.2.3	Description des contacts roues-sol	129
3.2.4	Expressions des différents modèles	134
4	Commande sous les hypothèses de roulement pur sans glissement	147
4.1	Poursuite d'une trajectoire mobile	150
4.1.1	Résultats existants	150
4.1.1.a	Approche Lyapunov	150
4.1.1.b	Approche linéarisation exacte	151
4.1.2	Linéarisation par bouclage dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1	153
4.2	Stabilisation par bouclage instationnaire	164
4.2.1	Résultats existants	164
4.2.2	Stabilisation par bouclage instationnaire d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1	166
4.2.2.a	Représentation de C_a par un vecteur de la sphère unité	166
4.2.2.b	Synthèse d'une loi de retour instationnaire cinématique	168
4.2.2.c	Synthèse d'une loi instationnaire partiellement dynamique	178
4.2.2.d	Résultats de simulation	182
4.2.3	Analyse de la vitesse de convergence des lois instationnaires	188
4.2.3.a	Présentation de la loi de bouclage instationnaire proposée par J.-B. Pomet	188
4.2.3.b	Variétés centres instationnaires	193
4.2.3.c	Analyse de la vitesse de convergence de la loi proposée dans [PTBC92]	200

4.2.3.d	Lois de bouclage d'état instationnaires conduisant à un taux de convergence exponentiel résultats proposés dans la littérature	214
4.3	Commande hybride pour la réalisation d'une tâche complète	217
4.3.1	Principe de la loi hybride	217
4.3.2	Réglage des commutations et des paramètres de la loi hybride	219
4.3.3	Simulations de la loi hybride	224
5	Commande en présence de glissements	229
5.1	Résultats existants	230
5.1.1	Analyse par perturbations singulières de la robustesse des lois de commande construites sous les Hypothèses 2.2	230
5.1.2	Synthèse de lois de bouclage prenant en compte les phénomènes de glissement	232
5.2	Commande des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 en présence de glissement	237
5.2.1	Modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 rendant compte des glissements	238
5.2.2	Commande du modèle cinématique d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2	243
5.2.2.a	Poursuite de trajectoire par linéarisation statique	243
5.2.2.b	Schéma adaptatif	258
5.2.3	Commande du modèle dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2	269
5.2.3.a	Poursuite de trajectoire par linéarisation statique	269
5.2.3.b	Analyse du problème de robustesse	270
6	Conclusion	273
A	Notions de géométrie différentielle	277
A.1	Variété, variété C^∞	278
A.2	Espace tangent à une variété, champ de vecteurs, opérateurs de Lie	282
A.3	Espace cotangent, 1-forme	286
A.4	Distribution, codistribution, théorème de Frobenius	287
A.5	Cas particulier où la variété étudiée est \mathbb{R}^n	290
B	Systèmes non-holonomes	295
B.1	Définition et exemples de systèmes non-holonomes	295
B.1.1	Définition	295
B.1.2	Exemples de systèmes physiques non-holonomes	298
B.2	Caractérisation d'une contrainte non-holonyme	300
B.2.1	Cas d'une contrainte d'ordre 1, linéaire en les vitesses	300
B.2.2	Cas d'une contrainte d'ordre 2, provenant d'un sous-actionnement	301
B.3	Propriétés relatives à la commande de certains systèmes non-holonomes	304
B.3.1	Commandabilité	304
B.3.2	Linéarisabilité exacte	306
B.3.3	Stabilisabilité	307
C	Extensions possibles au cas des robots mobiles multi-corps	309

D	Hypothèses 2.2 : description des différentes classes de robots	317
D.1	Preuve du Théorème 2.5	317
D.1.1	Le degré d'orientabilité d'un robot mobile vérifie $0 \leq \delta_o \leq 2$	317
D.1.2	Les couples $(\delta_m, \delta_o) \in \{(3, 1), (3, 2), (2, 2), (1, 0)\}$ sont impossibles	318
D.2	Preuve du Théorème 2.6	319
D.2.1	Preuve de la Proposition 2.14	320
D.2.2	Etude détaillée de la classe \mathcal{R}_0^3	321
D.2.3	Etude détaillée de la classe \mathcal{R}_0^2	322
D.2.4	Etude détaillée des robots de la classe \mathcal{R}_1^2	324
D.2.5	Etude détaillée des robots de la classe \mathcal{R}_1^1	326
E	Résultats techniques concernant les robots \mathcal{R}_2^1	331
E.1	Résultats techniques concernant la modélisation des robots \mathcal{R}_2^1	331
E.1.1	Preuve de la Proposition 2.19	331
E.1.2	Preuve de la Proposition 2.21	334
E.1.3	Preuve de la relation 2.61	339
E.2	Résultats techniques concernant la commande des robots \mathcal{R}_2^1	342
E.2.1	Calcul de la matrice Q^2 définie par (4.30)	342
E.2.2	Calcul de la fonction $M(t)$	345
	Bibliographie	362

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du travail

Notre objectif dans ce travail peut être résumé comme suit

Proposer des lois de commande permettant à des robots mobiles à roues de se déplacer de façon autonome, c'est-à-dire uniquement à partir d'une localisation fournie en temps réel par des capteurs.

Nous avons fait l'hypothèse que les problèmes liés à la mise en œuvre de différents capteurs ont été résolus. Cela suppose concrètement, qu'une interface bas-niveau a été réalisée qui, à partir des informations délivrées par les capteurs quels qu'ils soient (encodeurs, capteurs infra-rouge, capteurs à ultra-sons, télémètres laser, systèmes de vision, .), fournit en temps réel un jeu de variables (appelé état du système) repérant sans ambiguïté la position du robot mobile.

Aussi, en utilisant une terminologie propre à l'Automatique, le problème dont nous allons discuter peut être reformulé ainsi

Proposer des retours d'état permettant à des robots mobiles à roues de rattraper puis de suivre n'importe quelle trajectoire pré-spécifiée.

Dans ce travail, nous ne nous sommes pas focalisés sur une application robotique précise ou sur un système mobile particulier. Nous avons proposé plusieurs lois de commande pour différents robots-type, représentatifs de la plupart des systèmes mobiles à roues. Deux degrés d'approximation ont été successivement utilisés pour modéliser les différents robots-type. Dans un premier temps, nous avons supposé que le contact roues-sol était sans glissement. Cette hypothèse place les robots mobiles dans la large classe des systèmes mécaniques dits non-holonomes, dont la commande fait l'objet de très nombreuses études depuis quelques années, sans être cependant complètement traitée. Dans un second temps, nous nous sommes efforcés d'être plus réalistes, nous avons fait l'hypothèse que le contact roues-sol était celui d'un pneumatique avec la chaussée. Contrairement au cas précédent, la commande des systèmes ainsi obtenus est un sujet d'étude encore relativement neuf.

La structure fortement non-linéaire des différents modèles de robots mobiles nous a obligés à nous tourner vers des techniques de commande également non-linéaires. Nous avons utilisé deux grandes approches

- d'une part, celle consistant à linéariser de façon exacte un système non-linéaire, au moyen de retours d'état statiques ou dynamiques. Cette approche nous a semblé particulièrement intéressante, car elle offre les possibilités suivantes

convergence exponentielle vers la consigne,

très grande simplicité de réglage,

lois de commande C^∞

- d'autre part, dans les cas où l'approche par linéarisation exacte ne pouvait être utilisée, nous nous sommes tournés vers des lois de commande instationnaires, construites à partir de fonctions de Lyapunov. Cette approche a été choisie car elle est la seule qui permette de conserver, en toute circonstance, des lois de commande C^∞

1.2 Motivations pour l'étude de ce problème

Cette thèse a été proposée et financée dans sa totalité par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) / Service de Télopération et de Robotique (STR). Les motivations pour ce travail sont donc industrielles.

Plus précisément, plusieurs projets de robotique mobile autonome à roues sont en cours de développement au sein du CEA/STR.

Il est possible de séparer ces projets en 3 sous-groupes, en fonction de leur finalité

- robots mobiles à roues destinés à intervenir dans des sites interdits à l'homme

projet européen Teleman/MESSINA : véhicule à roues, conçu pour intervenir à l'intérieur d'une centrale nucléaire, dans des conditions post-accidentelles.

Ce robot se présente sous la forme de 4 modules très courts, pouvant s'orienter à 90° les uns des autres. Cette structure fragmentaire lui permet de circuler dans les couloirs très étroits d'une centrale nucléaire. Dans la version finale de ce projet, le module de tête portera un bras manipulateur, et les 3 autres emporteront un ensemble d'outils que le bras est susceptible d'utiliser.

projet RESSAC : véhicule tout terrain destiné à l'intervention à l'extérieur des bâtiments, dans des conditions post-accidents nucléaires.

Ce robot est développé dans le but d'épandre, sur un sol contaminé, des produits fixant la radio-activité, de manière à ce que la nappe phréatique ne soit pas elle-aussi contaminée.

projet VAP, en partenariat avec l'ONERA, le CNRS, l'INRIA et le CNES : véhicule destiné à l'exploration de la planète Mars.

Les systèmes reliant les roues au châssis de ce véhicule permettent à celui-ci de se déplacer sans retournement sur un sol très irrégulier comme celui de Mars.

Dans sa version finale, ce robot sera également équipé d'un bras manipulateur, afin de réaliser des opérations de prélèvement et de mesure sur le sol martien.

- robots mobiles à roues dédiés au convoyage automatique de marchandises en milieu industriel

projet COMMUTOR (en liaison avec la société ROL, pour le compte de la SNCF) véhicule à roues, dédié au chargement/déchargement de containers sur/depuis une plateforme ferroviaire.

- robots mobiles à roues destinés à l'aide aux personnes handicapées

projet européen Sprint/IMMEDIATE : fauteuil pour handicapés moteur, possédant un ensemble de fonctions semi-automatiques.

Ce système peut suivre un marquage au sol ou se positionner de façon précise devant un poste de travail (table, ...). Il est également équipé d'un bras manipulateur permettant d'assister la personne handicapée.

projet européen Tide/MOVID : fauteuil pour handicapés moteur, intégré dans un espace spécialement dédié à ces personnes.

Ce projet a pour objet de construire un appartement où chaque pièce a été pensée pour des personnes handicapées. Il inclut le développement d'un fauteuil permettant à ces personnes de circuler dans l'appartement et de se positionner devant les différents équipements dédiés (bureau, réfrigérateur, lit, ...).

Pour chacun de ces projets, la synthèse de lois de commande pertinentes constitue l'une des avancées technologiques à réaliser, et a motivé ce travail de thèse.

1.3 Contexte de ce travail

La commande des robots mobiles à roues est un sujet d'actives recherches. Le début de ce type d'études remonte au milieu des années 1980. Le domaine est loin, aujourd'hui, d'avoir été complètement traité. Il continue donc de faire l'objet de très nombreuses publications.

Une liste exhaustive des projets industriels en cours dans le domaine de la robotique mobile serait trop longue pour prendre place ici. Afin de donner une vue d'ensemble des secteurs d'application où la robotique mobile à roues est exploitée, nous rajouterons à la liste des activités du CEA/STR, deux autres grands secteurs d'application possibles

- d'une part, parmi les robots mobiles à roues destinés à intervenir dans des sites interdits à l'homme, un pôle important est constitué par les robots du champ de bataille,
- d'autre part, de nombreuses études sur la commande des robots mobiles conduisent à des réalisations destinées à améliorer la sûreté du déplacement routier. On peut séparer ces projets en 3 sous-groupes, en fonction de leur ambition

véhicules routiers non plus à 2 mais à 4 roues directrices, commercialisés aujourd'hui par la plupart des grands constructeurs automobiles. Le conducteur ne disposant toujours que de 2 commandes, le volant et l'accélérateur, il ne peut commander directement que l'orientation de l'essieu avant et la vitesse du véhicule. L'orientation de l'essieu arrière doit donc être gérée de manière automatique.

véhicules routiers circulant sur routes quelconques, et disposant d'un système d'aide à la conduite (vérification de la distance de sécurité par rapport au véhicule qui précède, vérification de la faisabilité d'un dépassement) projet européen PROMETHEUS.

véhicules routiers disposant d'un pilote automatique lorsque le véhicule circule sur des routes dédiées projet RGV de l'INRIA, projets IVHS aux Etats-Unis.

La commande des robots mobiles à roues étant un sujet de recherche très riche et très concurrentiel, il apparaît difficile, dans le cadre de cette introduction, de présenter un état de l'art complet sur ce domaine. Aussi, nous avons préféré détailler, en tête de chaque chapitre, les résultats existant dans la littérature sur le point qui va être abordé.

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire est organisé en 3 grandes parties

- Les Chapitres 2 et 3 sont consacrés à la modélisation des robots mobiles à roues, étape préalable à toute commande de ces systèmes. Plus précisément

le Chapitre 2 propose différents modèles pour représenter les robots mobiles à roues sous l'hypothèse que les roues roulent sans glisser sur le sol.

le Chapitre 3 dresse une étude bibliographique sur la modélisation des robots mobiles à roues lorsque que l'hypothèse de roulement pur sans glissement est relâchée.

- Les Chapitres 4 et 5 sont consacrés à la commande de ces systèmes. Plus précisément :

le Chapitre 4 propose plusieurs techniques pour commander un robot mobile à roues satisfaisant les hypothèses de roulement pur sans glissement :

- Section 4.1 une approche linéarisation exacte par bouclage dynamique est proposée pour réaliser la poursuite de trajectoires ne comportant pas de points d'arrêt,
- Section 4.2 une approche par fonctions de Lyapunov stationnaires est proposée pour réaliser la stabilisation sur une position robot arrêté,
- Section 4.3 une approche hybride, exploitant les 2 techniques précédentes, est proposée pour réaliser la poursuite d'une trajectoire se terminant par une position robot arrêté.

Une attention particulière a été portée sur les robots comportant plusieurs roues commandées à la fois en orientation et en rotation, en raison de la présence de singularités dans le modèle de ces systèmes. Les lois de commande ont à chaque fois été construites de manière à garantir que ces singularités seront évitées lors du déplacement de ces robots.

le Chapitre 5 propose quelques pistes pour commander un robot mobile à roues lorsque les hypothèses de roulement pur sans glissement sont relâchées.

- Les Chapitres A à E sont des annexes techniques

L'Annexe A rappelle les principaux concepts de la géométrie différentielle, utilisée abondamment aux Chapitres 4 et 5.

L'Annexe B précise la notion de systèmes non-holonomes.

L'Annexe C présente dans quelle mesure les résultats des Chapitres 4 et 5 peuvent être étendus au cas des robots mobiles multi-corps.

L'Annexe D détaille la classification des robots mobiles à roues dans le cas d'un roulement pur sans glissement.

L'Annexe E regroupe les preuves techniques non présentées dans le corps du mémoire.

1.5 Contributions de la thèse

1.5.1 Modélisation des robots mobiles

- Hypothèses de roulement pur sans glissement

Nous avons contribué à la modélisation des robots mobiles équipés de 3 roues et à leur classification en 5 classes d'équivalence, rapport [TAM92b]. Cette classification a été étendue à un nombre quelconque de roues dans ([CBA93]).

- ✓ Le modèle donné dans [TAM92b] ou [CBA93], pour représenter la classe des robots équipés de plusieurs roues commandées à la fois en rotation et en orientation, comportait des singularités n'ayant aucune signification physique. En utilisant la notion de centre instantané de rotation, nous avons proposé un second modèle, dont toutes les singularités correspondent à des orientations des roues qu'il est impératif d'éviter d'un point de vue pratique. En travaillant sur ce second modèle plutôt que sur celui donné dans [TAM92b] ou [CBA93], on ne se prive plus artificiellement de mouvements possibles pour ces robots. Ce travail a fait l'objet de 2 articles, [MAT92] et [TAM95b], et de 2 rapports [TAM92c] et [TAM93].

- Modélisation du phénomène de glissement

Nous avons réalisé une étude bibliographique détaillée sur la description du phénomène de glissement d'une roue avec le sol, et sur les différentes possibilités d'en

rendre compte dans un modèle qui reste suffisamment simple pour être utilisé par la suite dans la construction de lois de bouclage. Ce travail a fait l'objet d'un rapport [TAM94].

1.5.2 Commande des robots mobiles

• Hypothèses de roulement pur sans glissement

Nous nous sommes intéressés à la classe des robots mobiles comportant plusieurs roues commandées à la fois en rotation et en orientation. Le problème posé par ces robots est celui de l'évitement, au moyen de la loi de commande, des singularités du modèle.

pour réaliser la poursuite de trajectoires ne comportant pas de position d'arrêt, nous avons proposé une loi de bouclage dynamique linéarisante. Nous avons explicité une méthode permettant de s'assurer que les singularités du modèle ne seront jamais rencontrées, même pendant la période transitoire initiale où le robot converge vers la trajectoire de référence.

les lois de bouclage dynamique linéarisantes ne permettent pas de stabiliser ces robots sur une position d'arrêt. Ces systèmes étant en effet non-holonomes, l'obstruction de Brockett assure qu'il est impossible de les stabiliser au moyen de retours d'état continûment différentiables. Plutôt que de nous tourner vers des lois de commande discontinues, nous avons envisagé les lois de retour d'état dépendantes du temps, dites encore instationnaires, introduites récemment en théorie de la commande. Nous avons proposé une loi instationnaire garantissant que les singularités du modèle ne seront jamais rencontrées.

En pratique, la mission d'un robot mobile consiste en un déplacement depuis une position d'arrêt vers une autre position d'arrêt via une trajectoire pré-spécifiée. Aucune des 2 techniques présentées ci-dessus ne peut apporter à elle seule une réponse à ce problème. Nous avons proposé une loi de commande hybride qui utilise successivement les 2 lois de commande : la loi de bouclage dynamique loin du point visé, puis la loi instationnaire lorsque la trajectoire de référence a amené le robot près du point visé. Un algorithme de commutation entre ces 2 lois, aussi continu que possible et garantissant que les singularités du modèle ne seront jamais rencontrées est donné.

L'ensemble de ces résultats est donné dans [TAM95b] et [TAM93].

Les lois instationnaires proposées initialement (1990-1992) présentaient une vitesse de convergence très lente. Dans le rapport [TAM92a], nous avons, sur un exemple, analysé cette vitesse de convergence et proposé une technique pour la rendre exponentielle. Par la suite, d'autres solutions, plus générales, ont été proposées dans la littérature.

- **Commande des robots en présence de glissement**

Nous n'avons travaillé que sur le cas particulier de robot de type chariot. Nous avons proposé quelques pistes pour la commande en présence de glissement, en utilisant une approche par perturbations singulières, et une approche par commande adaptative. CE travail a fait l'objet d'un rapport [TAM95a].

Chapitre 2

Modélisation sous l'hypothèse d'un roulement pur sans glissement

Ce chapitre, ainsi que le chapitre suivant, est consacré à la modélisation des robots mobiles à roues, dans le but de développer par la suite des algorithmes de commande (Chapitres 4 et 5).

Rechercher un modèle qui décrive avec exactitude le comportement d'un robot mobile à roues est une tâche ardue. Ces systèmes sont en effet un assemblage complexe d'une multitude d'éléments mécaniques, mais aussi électriques, élastiques (les pneumatiques ou les suspensions par exemple) ou encore thermodynamiques (dans le cas d'une propulsion par un moteur à explosion). Les constructeurs et les équipementiers automobiles sont parvenus malgré tout à écrire des modèles très fidèles. Mais comme attendu, ceux-ci sont de très grande dimension et ne peuvent donc être utilisés qu'hors-ligne, pour conduire par exemple des simulations destinées à vérifier la pertinence de tel ou tel élément pour la mobilité et/ou la sécurité du robot ou du véhicule étudié. Il serait illusoire de prétendre les utiliser pour calculer en-ligne une loi de commande, comme nous souhaitons le faire dans ce mémoire.

Par conséquent, nous avons fait plusieurs hypothèses simplificatrices sur la structure des robots mobiles et sur leur environnement. Ces hypothèses sont présentées et discutées à la section 2.1. Deux niveaux de simplification ont été successivement retenus. Les modèles les plus simples ont été construits sous l'hypothèse (entre autres) que les roues roulent sans glisser sur le sol. C'est la description du contact roues-sol la plus fréquemment rencontrée dans la très vaste littérature sur la commande des robots mobiles. Cette description présente de nombreux avantages mais, pour certaines applications pratiques, n'est pas vraiment réaliste (voir discussion à la section 2.1). Nous avons donc également recherché, c'est notre second niveau de simplification, des modèles plus élaborés qui prennent en compte les phénomènes de glissement. La modélisation des robots mobiles à roues sous l'hypothèse d'un roulement sans glissement est présentée dans ce chapitre. La seconde modélisation, relâchant cette hypothèse, est présentée au Chapitre 3.

Ce chapitre est organisé comme suit : l'ensemble de nos hypothèses sur la structure des robots mobiles et sur leur environnement est formulé et discuté à la section 2.1. Nous introduisons ensuite, section 2.2, un ensemble de constantes et de variables permettant

de repérer la configuration d'un robot. Enfin, la mise en équations d'un robot mobile quelconque, satisfaisant aux hypothèses présentées à la section 2.1, est conduite aux sections 2.3 et 2.4, chacune de ces sections correspondant à une technique de modélisation différente. A la section 2.3, nous rappelons une méthode très générale, présentée initialement dans [ABC91], permettant de modéliser n'importe quel robot mobile à roues. Le point de départ pour la construction du modèle est l'expression de la vitesse des points de contact des roues avec le sol. Nous montrons également, section 2.3.2.b, que dans l'optique du calcul d'une loi de commande, les modèles des robots mobiles à roues ne constituent que 5 cas de figure différents. Ce résultat avait été noté dans [TAM92b] et a été complètement analysé dans [CBA93]. A la section 2.4, nous proposons un second modèle pour les robots comportant plusieurs roues commandées à la fois en rotation et en orientation. Pour ces robots, la méthode générale de modélisation, présentée à la section 2.3, conduit à des singularités, dans le sens qu'il existe des orientations des roues pour lesquelles le modèle est inexact. Nous montrons qu'en utilisant la notion de centre instantané de rotation, il est possible d'obtenir un modèle où ne subsiste que les singularités physiquement inévitables. Ce résultat original a été décrit dans [MAT92] et [TAM95b] ainsi que dans les 2 rapports [TAM92c] et [TAM93].

2.1 Hypothèses de modélisation

Dans cette section, nous explicitons et discutons nos hypothèses de modélisation. Nous avons classé celles-ci en 2 groupes. Les Hypothèses 2.1 portent sur la structure générale des robots mobiles et sur leur environnement. Nous les supposons toujours satisfaites. Les Hypothèses 2.2 portent sur le contact roues-sol. Ce sont les hypothèses dites de roulement pur sans glissement. Elles seront supposées satisfaites dans ce chapitre, ce qui nous conduira à un premier ensemble de modèles. Ces hypothèses seront ensuite relâchées au Chapitre 3, conduisant à des modèles de robots mobiles plus précis, mais plus complexes.

Enoncé

Hypothèse 2.1 Description générale des robots mobiles et de leur environnement

2.1.a. les robots mobiles sont supposés mono-corps (i.e. pas de remorque),

2.1.b. le châssis des robots, de même que les pièces reliant les roues au châssis sont supposés rigides (ce qui exclut en particulier tout système de suspension). Dans ces conditions, les robots mobiles ne présentent :

ni roulis (i.e. rotation du châssis du robot autour d'un axe parallèle à la direction d'avancement),

ni tangage (i.e. rotation du châssis du robot autour d'un axe perpendiculaire à la direction d'avancement),

ni carrossage (i.e. les plans contenant chacune des roues restent à tout moment verticaux)

2.1.c. la dynamique des différents moteurs commandant les roues en rotation et en orientation est supposée négligeable. Dans ces conditions, les couples de rotation et d'orientation appliqués sur les roues peuvent être considérés comme étant les variables de commande, à spécifier par l'utilisateur.

2.1.d. la surface d'évolution des robots est supposée horizontale et parfaitement plane,

2.1.e. il est supposé qu'aucune force aérodynamique n'agit sur les robots mobiles. □

Hypothèse 2.2 Roulement pur sans glissement

2.2.a. chaque roue est supposée indéformable et la zone de contact roue-sol est supposée ponctuelle,

2.2.b. la vitesse linéaire du point de contact d'une roue avec le sol est nulle. □

Commentaires

Par l'Hypothèse 2.1.1, nous laissons de côté l'ensemble des robots mobiles multi-corps. Ces systèmes ne présentent cependant pas nécessairement de difficulté supplémentaire par rapport aux robots mono-corps : certains, et notamment les robots à n remorques avec attaches sur essieu (voir 2.1(a)), peuvent être étudiés avec les mêmes arguments que ceux présentés dans ce mémoire. D'autres à l'inverse, posent plus de problèmes; c'est le cas par exemple des robots à plus de 2 remorques avec attaches caravanes (voir Figure 2.1(b)). Nous n'avons pas souhaité être le plus général possible, et donc par exemple inclure les robots multi-corps à attaches sur essieu, dans le souci de ne pas obscurcir inutilement la présentation : en incluant ces systèmes, nous aurions abordé les mêmes problèmes de modélisation et de commande que ceux étudiés ici, mais avec beaucoup plus d'indices à gérer. De plus, se limiter aux robots mobiles mono-corps permet de donner une unité à ce mémoire : nous étudions ici les problèmes de modélisation et de commande pour tous les robots mobiles mono-corps, nous n'aurions pas pu être aussi général si nous avions également considéré les robots multi-corps. Ces robots seront abordés brièvement à l'Annexe C. Les types de robots multi-corps sur lesquels certains de nos résultats peuvent être utilisés seront explicités et quelques références-clés seront mentionnées.

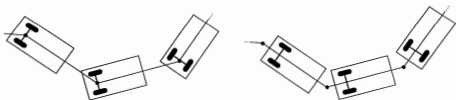


Figure 2.1. (a) attaches sur essieu

(b) attaches caravanes

Les *Hypothèses 2.1.2 à 2.1.5* sont quant à elles, des hypothèses très classiques dans la littérature, dès lors que le modèle du robot mobile est recherché dans le but de construire par la suite une loi de commande par retour d'état. Elles simplifient en effet significativement le modèle du robot.

L'Hypothèse 2.1.2 permet de réduire à la fois la dimension du modèle et la complexité des équations. En effet, sous cette hypothèse, la configuration du châssis peut être repérée sans ambiguïté par seulement 3 variables : les coordonnées (x, y) d'un point fixe du châssis et θ l'orientation de celui-ci, toutes trois mesurées par rapport à un repère immobile. Sans cette hypothèse, il aurait fallu rajouter une liste d'autres variables décrivant l'élongation de chacune des pièces flexibles (suspensions ou autres). Ces variables supplémentaires agissant en général sur la dynamique de toutes les autres, les équations du modèle auraient également été beaucoup plus complexes.

L'Hypothèse 2.1.3 permet également de réduire la dimension du modèle. En effet, sans cette hypothèse, il aurait fallu pour écrire les équations du robot, introduire des variables décrivant la configuration de chacun des actionneurs. Cela aurait conduit à beaucoup plus d'équations, mais pas forcément plus complexes, puisque cette fois, les variables supplémentaires n'agissent pas sur la dynamique de toutes les autres, mais uniquement sur la dynamique des variables décrivant le même actionneur qu'elles.

L'Hypothèse 2.1.4 permet, lors de la mise en équations du robot, de ne pas avoir à prendre en compte l'ensemble des efforts de gravité.

L'Hypothèse 2.1.5 enfin, permet de ne pas avoir à prendre en compte des forces aérodynamiques, qui sont par nature difficiles à modéliser.

Ces 4 hypothèses sont en général satisfaites dans le cas des robots mobiles à roues conçus pour se déplacer à l'intérieur de bâtiments : les Hypothèses 2.1.4 et 2.1.5 sont, pour ce type d'application, trivialement vérifiées. Le sol étant horizontal et plan, il est possible de se passer de suspensions (Hypothèse 2.1.2). Enfin, les vitesses demandées à un robot se déplaçant dans un bâtiment étant a priori faibles, il est possible de choisir des moteurs satisfaisant l'Hypothèse 2.1.3. Le champ des applications potentielles de ce type de robots comporte le transbordement de marchandises, l'utilisation en tant que robots ronds, ..

Les Hypothèses 2.1.2 à 2.1.5 ont cependant été également utilisées pour décrire beaucoup d'autres systèmes mobiles. Elles peuvent en effet être considérées comme une bonne approximation de la réalité tant que, d'une part le sol, sans être parfaitement plan, n'est quand même pas trop irrégulier, et d'autre part, la vitesse des robots n'est pas très importante (cette notion est difficile à quantifier, elle dépend beaucoup des conditions de contact roues-sol). Les robots mobiles d'intérieur équipés de suspensions ou les véhicules routiers appelés à se déplacer sur des routes asphaltées ont ainsi été le plus souvent modélisés à l'aide de ces hypothèses. Celles-ci permettent en définitive de décrire, soit de façon exacte, soit de manière approchée mais satisfaisante, la très grande majorité des systèmes mobiles à roues rencontrés en pratique. Ce sont, comme cela a été dit plus haut, les hypothèses les plus classiques utilisées dans la littérature.

Les *Hypothèses 2.2* de roulement pur sans glissement sont également très classiques dans la littérature. Elles présentent 3 grands avantages

les modèles de robots obtenus sous ces hypothèses sont très compacts et très simples (voir Tableau 2.1),

les robots mobiles à roues sont dans ce cas des systèmes mécaniques non-holonomes. Il est par conséquent possible d'exploiter les résultats qui ont été développés pour la commande de tels systèmes (voir Annexe B).

enfin, sous ces hypothèses, l'ensemble des robots mobiles à roues, quels que soient le type de roues dont ils sont équipés, et quelle que soit la disposition des roues sur le châssis du robot, ne forme que 5 cas de figure différents pour ce qui est du calcul d'une loi de commande. Le problème de la commande de l'ensemble des robots mobiles à roues peut donc être ramené à l'étude de la commande de 5 robots-types. Ce point est précisé à la section 2.3.2.b.

Les Hypothèses 2.2 ne peuvent cependant pas être systématiquement utilisées. En effet, dans les circonstances suivantes

les conditions de contact roues-sol sont mauvaises (sol verglacé par exemple),

la vitesse du robot mobile est élevée (situation à définir par rapport aux conditions de contact),

la surface sur laquelle se déplace le robot n'est pas parfaitement plane,

il y a forcément glissement et le modèle du robot doit donc en rendre compte. Pour les robots mobiles se déplaçant à l'intérieur de bâtiments, au vu des sols sur lesquels ils évoluent et au vu de leur vitesse généralement peu élevée, les Hypothèses 2.2 semblent tout à fait raisonnables. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les robots évoluant en extérieur. Cela sera fonction du type de sol rencontré et de la vitesse demandée au robot.

Les 2 possibilités sont envisagées dans ce mémoire dans ce chapitre, une première modélisation des robots mobiles est proposée, en supposant les Hypothèses 2.2 satisfaites. Une seconde modélisation est proposée au Chapitre 3 dans le cas où ces hypothèses ne peuvent pas être utilisées.

2.2 Description d'un robot mobile

Le premier point dans la construction d'un modèle consiste à sélectionner un ensemble de variables permettant de repérer la configuration du système. Ces variables sont appelées coordonnées généralisées :

Définition 2.1 Coordonnées généralisées

On appelle coordonnées généralisées associées à un système mécanique S un ensemble de variables dont la donnée, combinée avec les constantes décrivant la géométrie de S , permet de connaître sans ambiguïté la position de chacun des points de S

Un modèle pour \mathcal{S} se présentera donc sous la forme d'un système d'équations différentielles reliant les coordonnées généralisées, leurs dérivées et les commandes de \mathcal{S}

□

Schématiquement, un robot mobile à roues satisfaisant aux Hypothèses 2.1 et 2.2 se présente sous la forme d'un châssis rigide équipé avec n roues, où $n \geq 3$ afin que l'équilibre statique du système soit assuré. Nous décrivons ci-dessous, tout d'abord un groupe de coordonnées généralisées repérant tous les points du châssis (Proposition 2.1), puis un groupe de coordonnées généralisées repérant cette fois les points des différentes roues (Proposition 2.6). L'ensemble constitue de façon évidente un jeu de coordonnées généralisées pour le robot mobile (Proposition 2.7). Cette description d'un robot mobile a été proposé initialement dans [ABC91].

2.2.1 Coordonnées généralisées décrivant le châssis d'un robot

Soit (voir Figure 2.2)

O un point immobile dans le domaine d'évolution du robot,

P un point fixe sur le châssis,

$[O, \vec{I}, \vec{J}]$ un repère immobile dans le plan d'évolution du robot,

$[P, \vec{i}, \vec{j}]$ un repère attaché au châssis,

Nous noterons

(x, y) les coordonnées de P dans $[O, \vec{I}, \vec{J}]$,

θ l'orientation du repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ par rapport au repère $[O, \vec{I}, \vec{J}]$, i.e. $\theta = \widehat{\vec{I}, \vec{i}}$.

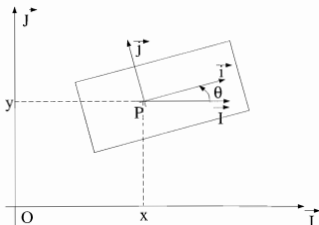
Ces 3 variables seront dans la suite regroupées dans le vecteur ξ

$$\xi = (x, y, \theta)^T \quad (2.1)$$

Proposition 2.1 Coordonnées généralisées décrivant le châssis d'un robot

La donnée du vecteur ξ permet de caractériser sans ambiguïté la configuration du châssis d'un robot. □

Preuve : Le châssis étant supposé mono-corps et rigide (Hypothèses 2.1.1 et 2.1.2), tous les points qui le constituent sont fixes dans le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$. Par conséquent, la donnée du vecteur ξ qui décrit ce repère par rapport au repère immobile $[O, \vec{I}, \vec{J}]$, permet aussi de localiser sans ambiguïté tous les points du châssis du robot. ◁

Figure 2.2: Repères $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ et $[P, \vec{i}, \vec{j}]$

2.2.2 Coordonnées généralisées décrivant les roues

Le châssis d'un robot peut être équipé a priori avec 4 types de roues, chacun donnant lieu à un jeu de coordonnées généralisées qui lui est propre. Ces 4 types de roues sont détaillés ci-dessous.

Nous introduisons auparavant les notations communes à toutes les roues :

Q : point d'attache de la roue sur le châssis (voir Figure 2.3 par exemple). Par définition, Q est un point fixe sur le châssis. Il est donc complètement défini par la donnée du couple de constantes (l, α) , coordonnées polaires de Q dans $[P, \vec{i}, \vec{j}]$.

$$l = \|\vec{PQ}\|,$$

$$\alpha = \widehat{\vec{i}, \vec{PQ}}$$

Dans le cas particulier où Q est confondu avec P , α est par convention choisi égal à 0.

S : centre de la roue. La position de S par rapport à Q sera repérée à l'aide des 3 quantités suivantes :

β : angle entre \vec{PQ} et la normale orientée au plan de la roue (voir Figure 2.4 par exemple).

Au vu de la définition donnée pour l'angle α , β peut être défini de façon équivalente comme étant l'angle entre \vec{i} et la normale orientée au plan de la roue moins la valeur de l'angle α . Cette seconde définition a l'avantage de garder un sens lorsque Q est confondu avec P dans ce cas particulier, β est

clairement l'angle entre \vec{i} et la normale orientée au plan de la roue.
 β peut être une constante ou variable suivant que l'orientation de la roue par rapport au châssis est fixe ou non.

d norme de la projection de \vec{QS} sur le plan horizontal (voir Figure 2.5).

h norme de la projection de \vec{QS} sur un axe vertical (voir Figure 2.5 par exemple)

Les Hypothèses 2.1 assurent que h et d sont des constantes.

r rayon de la roue,

φ : angle de rotation de la roue (voir Figure 2.3 par exemple). Cette variable mesure de combien la roue a tourné depuis un instant initial. Les roues étant supposées indéformables (Hypothèse 2.2.1), φ permet de repérer sans ambiguïté la position de n'importe quel point sur la roue. Pour cette raison, ce sera l'une des coordonnées généralisées, quel que soit le type de roue considéré.

2.2.2.a Roues fixes

Définition 2.2 Roue fixe

On appelle roue fixe, une roue pour laquelle

l'axe (QS) est vertical,

l'orientation de la roue par rapport au châssis est fixe.

Une telle roue est représentée sur la Figure 2.3.

□

L'axe (QS) étant vertical, le centre de la roue S est un point fixe sur le châssis. Il peut donc être repéré uniquement à l'aide de constantes. Il en va de même pour l'orientation de la roue, puisque celle-ci est fixe par rapport au châssis, et pour son rayon, puisque les roues sont (Hypothèse 2.2.1) supposées indéformables. Par conséquent, une unique variable est nécessaire pour repérer la position de chaque point d'une roue fixe : φ . Un jeu de constantes de dimension minimum est le triplet l, α, h , qui permet de repérer S , complété par β et r qui permettent de repérer respectivement l'orientation de la roue et son rayon.

Proposition 2.2 Description d'une roue fixe

La configuration d'une roue fixe est caractérisée sans ambiguïté par la donnée :

d'une coordonnée généralisée la variable φ ,

- de 5 constantes : l, α, h, β et r .

□

2.2.2.b Roues directrices

Définition 2.3 Roue directrice

On appelle roue directrice, une roue pour laquelle

l'axe (QS) est vertical,

l'orientation de la roue par rapport au châssis est commandée par un moteur.

Une telle roue est représentée sur la Figure 2.4

□

La seule différence avec le cas d'une roue fixe est que l'angle β n'est cette fois plus constant mais variable, et doit donc naturellement être inclus parmi les coordonnées généralisées

Proposition 2.3 Description d'une roue directrice

La configuration d'une roue directrice est caractérisée sans ambiguïté par la donnée

de 2 coordonnées généralisées les variables β et φ ,

de 4 constantes : l , α , h et r .

□

2.2.2.c Roues désaxées

Définition 2.4 Roue désaxée

On appelle roue désaxée, une roue pour laquelle

l'axe (QS) n'est pas vertical (i.e. $d \neq 0$),

l'orientation de la roue par rapport au châssis est soit libre, soit commandée par un moteur.

Une telle roue est représentée sur la Figure 2.5.

□

Le centre de la roue S n'est plus, dans ce cas, un point fixe par rapport au châssis. Pour le repérer, la méthode la plus simple, dans le sens qu'elle ne fait apparaître qu'une seule variable, consiste à donner les 2 constantes (l, α) qui caractérisent le point d'attache Q , puis les 2 constantes h, d et la variable β qui décrivent sans ambiguïté le vecteur \overrightarrow{QS} . A partir de là, pour identifier chaque point sur la roue, il suffit de connaître d'une part le rayon r et d'autre part la variable φ .

Proposition 2.4 Description d'une roue désaxée

La configuration d'une roue désaxée est caractérisée sans ambiguïté par la donnée

de 2 coordonnées généralisées les variables β et φ ,

de 5 constantes l , α , h , d et r

□

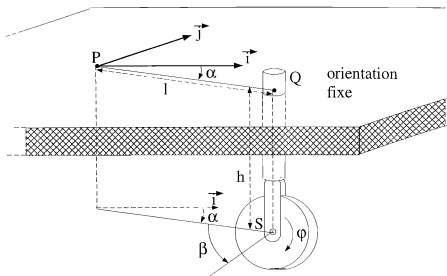


Figure 2.3: Roue fixe

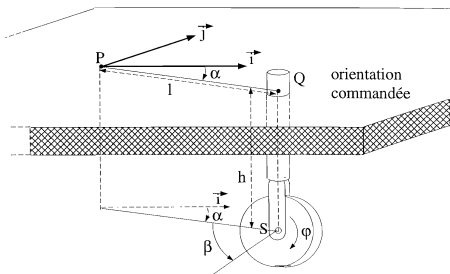


Figure 2.4: Roue directrice

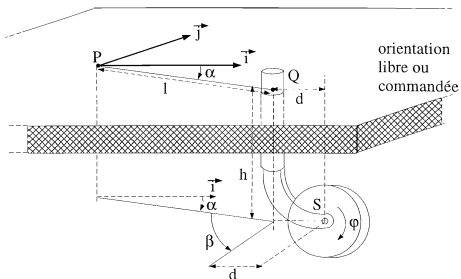


Figure 2.5: Roue désaxée

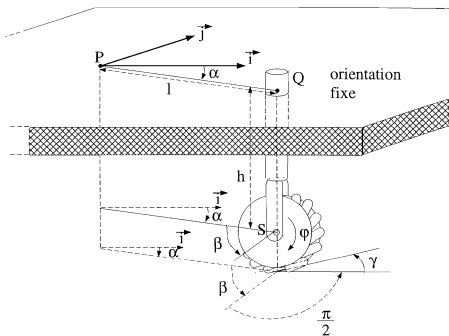


Figure 2.6: Roue à galets

2.2.2.d Roues omnidirectionnelles

Définition 2.5 Roue omnidirectionnelle

On appelle roue omnidirectionnelle, une roue pour laquelle

l'axe (QS) est vertical,

- l'orientation de la roue par rapport au châssis est fixe,

un dispositif spécial, placé sur la roue, permet à celle-ci d'évoluer librement dans une direction autre que celle donnée par le plan de la roue. \square

L'exemple le plus classique de roue omnidirectionnelle est la roue à galets (dite encore roue suédoise) représentée sur la Figure 2.6 sur la bande de roulement d'une telle roue sont placés de petits cylindres, appelés aussi galets, pouvant tourner librement autour de leur axe. L'orientation de ces axes par rapport au plan de la roue, notée γ et la même pour tous les cylindres, définit une direction d'évolution libre pour la roue : une roue à galets peut évoluer bien sûr selon la direction donnée par le plan de la roue, simplement en faisant avancer ou reculer la roue (i.e. en faisant croître ou décroître φ), mais également selon la direction perpendiculaire aux axes des cylindres, du fait de la rotation libre du cylindre en contact avec le sol.

Les roues à galets, et plus généralement les roues omnidirectionnelles, ont été développées afin de proposer une solution au problème suivant : construire des robots mobiles qui soient capables de suivre n'importe quelle trajectoire $\xi(t)$, i.e. des robots pour lesquels il soit possible de faire suivre au point P , fixe sur le châssis, n'importe quelle trajectoire $(x(t), y(t))$, et simultanément de faire se ré-orienter le châssis selon une loi quelconque $\theta(t)$ (il sera quand même supposé que $\xi(t) = (x(t), y(t), \theta(t))^T$ est au moins deux fois continûment différentiable). De tels robots, offrant cette complète liberté pour leur déplacement, présenteraient un intérêt pratique évident. Les robots les plus courants ne proposent pas une telle propriété : une voiture par exemple, ne peut pas se garer entre 2 autres voitures le long d'un trottoir de la façon qui serait la plus simple, c'est-à-dire en se déplaçant perpendiculairement au trottoir. Elle doit effectuer un mouvement plus complexe, appelé créneau.

Une première solution pour obtenir une complète liberté dans le déplacement consiste à commander, à l'aide d'un moteur, l'orientation de toutes les roues. Cela est techniquement possible, mais pose 2 difficultés :

d'une part, il y a redondance des actionneurs, ce qui n'est pas facile à gérer au moment du calcul de la commande,

d'autre part, certaines configurations des roues conduisent à des singularités.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons beaucoup aux robots équipés uniquement de roues directrices, et plusieurs solutions pour le calcul de lois de commande seront proposés au Chapitre 4.

La solution alternative consiste à équiper le châssis du robot avec des roues omnidirectionnelles. Dans ce cas, les 2 difficultés précédentes disparaissent : ainsi, le robot UCL

((CB89)) qui est équipé de 3 roues à galets placées aux sommets d'un triangle équilatéral, peut décrire n'importe quelle trajectoire $x(t), y(t), \theta(t)$, tout en ne comportant que 3 actionneurs (ceux entraînant les 3 roues en rotation). Il n'y a aucune redondance dans la commande, et on montre également qu'il n'y a aucune singularité. Donc, comparativement à la première solution proposée, les robots à roues omnidirectionnelles sont particulièrement simples à commander. Ce point sera discuté très brièvement à la page (4.2). Une expérience destinée à mettre en évidence la complète liberté de déplacement des robots à roues omnidirectionnelles a consisté à équiper le châssis d'un tel robot avec un crayon, et à lui faire écrire une phrase sur le sol sans jamais relever le crayon. La phrase obtenue est parfaitement lisible [WA95, Figure 12].

Plusieurs prototypes de robots équipés de roues à galets ont été réalisés. Parmi ceux-ci, on peut citer le robot UCL [CB89], le robot URANUS [MN87] ou dernièrement le robot ACTRESS [ASB+95]. D'autres références peuvent être trouvées dans ces 3 articles. Sur le robot UCL, l'axe des galets a été choisi parallèle au plan de la roue (i.e. $\gamma = 0$ d'après les notations de la Figure 2.6). L'inconvénient de ce choix est qu'il conduit à une discontinuité du contact lors du passage d'un galet à un autre et donc à des chocs successifs. Cette discontinuité peut être réduite, soit en inclinant l'axe des galets (sur le robot URANUS, γ a été choisi égal à 45°), soit en gardant $\gamma = 0$ mais en plaçant deux rangées de galets côte-à-côte sur la bande de roulement de la roue. Ces 2 rangées de galets sont décalées, de façon qu'avant qu'un galet ne perde contact avec le sol, un galet de l'autre rangée ait déjà pris contact. C'est le choix qui a été fait pour le robot ACTRESS. Des roues omnidirectionnelles autres que les roues à galets ont également été proposées et réalisées. Ce sont en général des sphères ou des combinaisons de sphères. Deux exemples peuvent être trouvés dans [KP92] et [WA95].

Pour décrire de façon tout à fait rigoureuse une roue à galets (cf. Définition 2.1), il faudrait faire apparaître parmi les coordonnées généralisées autant de variables qu'il y a de galets, afin de pouvoir repérer pour chacun leur position. Nous ne le ferons pas, car les galets pouvant tourner librement autour de leur axe, leur position est sans influence sur la dynamique des autres variables du robot. En fait, seule l'orientation des galets par rapport au plan de la roue a une conséquence sur la dynamique de ξ ou de φ . Cette orientation sera repérée par la constante γ , définie de la manière suivante pour qu'elle garde une signification quand la roue omnidirectionnelle n'est pas une roue à galets

γ angle entre le plan de la roue omnidirectionnelle et la perpendiculaire à la direction d'évolution libre.

De façon évidente, une roue omnidirectionnelle n'a d'intérêt que si le plan de la roue et la direction d'évolution libre sont 2 directions distinctes en effet, si ces 2 directions étaient confondues, la roue omnidirectionnelle ne posséderait pas de propriétés supplémentaires par rapport à une roue fixe. Par conséquent, la constante γ vérifie :

$$\gamma \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une roue à galets, γ est d'après la définition donnée ci-dessus, tout simplement l'angle entre le plan de la roue et l'axe des galets, voir Figure 2.6. Le choix des

constantes et des coordonnées généralisées permettant de décrire une roue omnidirectionnelle est maintenant trivial. L'axe (QS) étant vertical, le centre S est fixe par rapport au châssis et peut donc, comme pour la roue fixe, être repéré par les 3 constantes l, α, h . L'orientation de la roue est complètement caractérisée par la donnée de β qui dans ce cas, est une constante, puisque l'orientation de la roue est fixe. Le rayon r de la roue est également une constante. Ensuite, comme il a été choisi de ne pas repérer la position des galets ou de tout autre système omnidirectionnel, nous avons juste besoin de connaître la direction d'évolution libre de la roue. Cette information est donnée par la constante γ . Il n'est donc besoin en définitive que d'une seule variable pour repérer la position de chaque point d'une roue omnidirectionnelle φ .

Proposition 2.5 Description d'une roue omnidirectionnelle

La configuration d'une roue omnidirectionnelle est caractérisée sans ambiguïté par la donnée

d'une coordonnée généralisée la variable φ ,

de 6 constantes $l, \alpha, h, \beta, \gamma$ et r .

□

2.2.2.e Description d'un ensemble de roues

Pour exprimer maintenant les coordonnées généralisées décrivant les roues d'un robot mobile quelconque, il nous faut d'abord introduire les notations suivantes

Nous noterons

n : le nombre total de roues équipant le robot,

n^{di} le nombre de roues directrices,

n^{dc} le nombre de roues désaxées,

n^{fs} : le nombre de roues fixes,

n^{om} le nombre de roues omnidirectionnelles.

avec bien sûr .

$$n = n^{di} + n^{dc} + n^{fs} + n^{om}$$

Une convention est également nécessaire pour repérer les différentes roues sur le châssis

Convention 2.1 Numérotation des roues

Un numéro est attribué à toutes les roues, dans l'ordre : roues directrices, roues désaxées, roues fixes, puis roues omnidirectionnelles, c'est-à-dire

roues numérotées de 1 à n^{di} : roues directrices,

roues numérotées de $n^{di} + 1$ à $n^{di} + n^{dc}$: roues désaxées,

roues numérotées de $n^{di} + n^{de} + 1$ à $n^{di} + n^{de} + n^{fs}$ roues fixes,

roues numérotées de $n^{di} + n^{de} + n^{fs} + 1$ à n roues omnidirectionnelles.

Dans tout ce qui suit, les indices sur les variables φ , sur les variables ou les constantes β et sur les constantes l, α, d, γ feront référence à cette numérotation. \square

A l'aide de tous ces éléments, nous pouvons énoncer la proposition suivante

Proposition 2.6 Coordonnées généralisées décrivant les roues d'un robot

La donnée du vecteur Ξ

$$\Xi = (\beta_1, \dots, \beta_{n^{di}+n^{de}}, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$$

permet de caractériser sans ambiguïté la configuration des roues d'un robot. \square

Preuve : La preuve de la Proposition 2.6 est immédiate au vu des Propositions 2.2 à 2.5. \triangleleft

Nous pouvons maintenant préciser l'ensemble des coordonnées généralisées nécessaires à la description d'un robot mobile à roues

Proposition 2.7 Coordonnées généralisées décrivant un robot mobile sous les Hypothèses 2.1 et 2.2

Un robot mobile satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2 peut être caractérisé sans ambiguïté par la donnée du vecteur q

$$q = (\xi, \Xi)^T$$

\square

Preuve : La Proposition 2.7 est une conséquence directe des Propositions 2.1 et 2.6. \triangleleft

2.3 Modélisation d'un robot mobile quelconque

Nous rappelons dans cette section la méthode, proposée initialement dans [ABC91], permettant d'obtenir grâce une démarche systématique, le modèle de n'importe quel robot mobile à roues satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2.

2.3.1 Expression de la vitesse du point de contact d'une roue avec le sol en fonction des coordonnées généralisées

La donnée d'un vecteur de coordonnées généralisées permet, Définition 2.1, de repérer sans ambiguïté la position de chacun des points constituant le système étudié. Si maintenant la valeur de la dérivée de ce vecteur est également donnée, alors la vitesse en chaque point du système est elle-aussi, complètement définie. Aussi, dans le cas des robots mobiles à roues satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2, la donnée des variables q et \dot{q} permet de calculer la vitesse en chaque point du robot, et donc en particulier aux points de contact des roues avec le sol.

La vitesse en ces n points n'étant pas quelconque (elle est supposée nulle, Hypothèse 2.2.2), il apparaît clairement un ensemble de contraintes liant les vecteurs \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$. Ces contraintes sont explicitées dans cette section, et seront utilisées aux sections 2.3.2 et 2.3.3 pour calculer le modèle d'un robot mobile quelconque.

L'expression donnant la vitesse du point de contact d'une roue avec le sol en fonction des coordonnées généralisées et de leur dérivée dépend bien sûr du type de roue considéré. Nous détaillons ci-dessous les calculs dans le cas d'une roue désaxée. C'est le cas le plus complexe, d'où il est possible, par diverses simplifications, d'en déduire l'expression de la vitesse du point de contact roue-sol pour les autres types de roues.

Soit une roue désaxée, et sur cette roue, soient

$[S, \vec{i}_r, \vec{j}_r, \vec{k}_r]$: un repère orthonormal attaché à la roue, comme montré sur la Figure 2.7,

T le point de contact de la roue avec le sol.

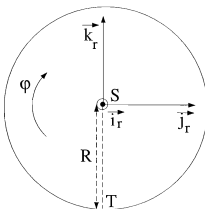


Figure 2.7: Repère $[S, \vec{i}_r, \vec{j}_r, \vec{k}_r]$

Pour exprimer \vec{V}_T , vitesse linéaire du point T , en fonction de ξ , Ξ , $\dot{\xi}$ et $\dot{\Xi}$, nous utiliserons de façon récurrente la loi de composition des vitesses sur un corps rigide, rappelée ci-dessous

Théorème 2.1 Loi de composition des vitesses sur un corps rigide

Soient A et B , 2 points sur un corps rigide, et $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse instantanée de rotation de ce corps. Alors les vitesses linéaires aux points A et B , notées respectivement \vec{V}_A et \vec{V}_B , sont reliées par la relation :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA} \quad (2.3)$$

□

Les points T et S appartenant tous deux à la roue supposée rigide (Hypothèse 2.1.2), on obtient facilement, en utilisant une première fois le Théorème 2.1, que

$$\begin{aligned}\vec{V}_T &= \vec{V}_S + (-\dot{\varphi})\vec{r}_r \wedge \overrightarrow{ST} \\ &= \vec{V}_S - r\dot{\varphi}\vec{j}_r\end{aligned}\quad (2.4)$$

(Le signe moins apparaissant dans la relation (2.4) est dû au fait que $\dot{\varphi}$ est compté positivement lorsque la roue tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique, voir Figure 2.7). La liaison mécanique reliant la roue au châssis étant elle-aussi rigide (Hypothèse 2.1.2), il est possible, toujours à l'aide du Théorème 2.1 de relier \vec{V}_S à \vec{V}_Q

$$\vec{V}_S = \vec{V}_Q + (\dot{\theta} + \dot{\beta})\vec{k}_r \wedge \overrightarrow{QS} \quad (2.5)$$

Enfin, le châssis du robot étant également rigide (toujours Hypothèse 2.1.2), le Théorème 2.1 assure que

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \dot{\theta}\vec{k}_r \wedge \overrightarrow{PQ} \quad (2.6)$$

En regroupant (2.4), (2.5) et (2.6), nous obtenons en conclusion que

$$\vec{V}_T = \vec{V}_P + \dot{\theta}\vec{k}_r \wedge \overrightarrow{PS} + \dot{\beta}\vec{k}_r \wedge \overrightarrow{QS} - r\dot{\varphi}\vec{j}_r \quad (2.7)$$

Les 2 vecteurs \overrightarrow{QS} et \overrightarrow{PS} s'expriment aisément à l'aide des constantes décrivant la géométrie du robot (voir Figure 2.5)

$$\overrightarrow{QS} = d\vec{j}_r - d\vec{k}_r \quad (2.8)$$

$$\overrightarrow{PS} = l\cos\alpha\vec{i} + l\sin\alpha\vec{j} + d\vec{j}_r - d\vec{k}_r \quad (2.9)$$

avec $[O, \vec{i}, \vec{j}]$ le repère attaché au châssis du robot, représenté sur la Figure 2.2, et d la composante verticale du vecteur \overrightarrow{QS} (non représentée sur la Figure 2.5 car cette constante n'apparaît pas dans l'expression finale de la contrainte).

D'autre part, la vitesse du point P , par définition (cf. Proposition 2.1), est donnée par

$$\vec{V}_P = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \quad (2.10)$$

avec $[O, \vec{i}, \vec{j}]$ le repère immobile, représenté sur la Figure 2.2. Les relations entre les différents repères intervenant dans (2.9) et (2.10) peuvent être facilement calculées. Sur la base des Figure 2.2 et 2.7, il est clair en effet que

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos\theta\vec{i}_r - \sin\theta\vec{j}_r \\ \vec{j} &= \sin\theta\vec{i}_r + \cos\theta\vec{j}_r\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\vec{i} &= -\cos(\alpha + \beta) \vec{i}_r + \sin(\alpha + \beta) \vec{j}_r \\ \vec{j} &= -\sin(\alpha + \beta) \vec{i}_r - \cos(\alpha + \beta) \vec{j}_r\end{aligned}\quad (2.12)$$

Afin de simplifier l'expression finale de \vec{V}_T , nous introduisons la matrice orthogonale de rotation de dimension 3, notée $R(\theta)$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (2.13)$$

En reportant (2.1) (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) dans (2.7), nous obtenons l'expression recherchée pour \vec{V}_T

$$\begin{aligned}\vec{V}_T &= -\left[\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), d + l \sin \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + d \dot{\beta} \vec{i}_r \\ &\quad - \left[-\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), l \cos \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} \vec{j}_r\end{aligned}\quad (2.14)$$

L'Hypothèse 2.2 conduit donc, dans le cas d'une roue désaxée, à deux contraintes

Proposition 2.8 Contraintes associées à une roue désaxée

$$\begin{aligned}\left[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta), d + l \sin \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + d \dot{\beta} &= 0 \\ \left[-\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), l \cos \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

où $\xi = (x, y, \theta)^T$, β, φ sont des variables et l, α, d, r des constantes. □

Preuve : L'Hypothèse 2.2 assure que $\vec{V}_T = 0$. La preuve de la Proposition 2.8 est alors immédiate au vu de (2.14). ◁

Les contraintes associées aux autres types de roues se déduisent de la Proposition 2.8 sans aucun calcul supplémentaire

Proposition 2.9 Contraintes associées à une roue directrice

$$\begin{aligned}\left[\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), l \sin \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} &= 0 \\ \left[-\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), l \cos \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

où $\xi = (x, y, \theta)^T$, β, φ sont des variables et l, α, r des constantes. □

Preuve : Il suffit de mettre d à zéro dans la Proposition 2.8. ◁

Proposition 2.10 Contraintes associées à une roue fixe

$$\begin{aligned}\left[\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), l \sin \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} &= 0 \\ \left[-\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), l \cos \beta \right] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

où $\xi = (x, y, \theta)^T$, φ sont des variables et l, α, β, r des constantes. □

Preuve : Une roue fixe n'est en fait rien d'autre qu'une roue directrice dont l'orientation aurait été bloquée. Les contraintes associées à une roue fixe sont donc exactement les mêmes que celles données à la Proposition 2.9, excepté que β est cette fois une constante et non plus une variable. \triangleleft

Proposition 2.11 Contraintes associées à une roue omnidirectionnelle

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0 \quad (2.15)$$

où $\xi = (x, y, \theta)^T$, φ sont des variables et $l, \alpha, \beta, r, \gamma$ des constantes. \square

Preuve : Dans le cas d'une roue à galets, qui est la roue omnidirectionnelle la plus usuelle, ce sont les galets qui sont en contact avec le sol, et non les points situés sur la périphérie de la roue. Aussi, pour identifier le point T en contact avec le sol, il faut de façon évidente que soient donnés les angles de rotation de chacun des galets. Dès lors, il est clair que dans toute expression de \vec{V}_T apparaît nécessairement la dérivée de ces angles. Étant donné que nous avons pris la décision de ne pas repérer la position des galets, voir Proposition 2.5 et la discussion qui la précède, il nous est impossible de proposer une expression pour \vec{V}_T et a fortiori pour les contraintes associées à une roue à galets.

On peut contourner cette difficulté en étant plus schématique : une roue à galets peut en effet être vue comme une roue fixe qui posséderait la propriété "magique" de pouvoir se déplacer librement dans une direction donnée, caractérisée par la constante γ . De façon évidente, un robot équipé de telles roues présenterait une dynamique rigoureusement identique à celle d'un robot équipé de roues à galets. Les avantages de cette vision schématisée de la roue à galets sont d'une part que l'expression des contraintes associées à cette roue fictive ne requiert pas la connaissance des angles de rotation des galets puisque ceux-ci n'apparaissent plus, et d'autre part, cette roue fictive peut décrire non seulement les roues à galets, mais aussi n'importe quelle autre roue omnidirectionnelle.

L'expression des contraintes associées à cette roue fictive peut être obtenue de la manière suivante : la vitesse du point de contact d'une roue fixe avec le sol est d'après la Proposition 2.10 :

$$\begin{aligned} \vec{V}_T = & - \left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} \right] \vec{i}_r \\ & - \left[\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} \right] \vec{j}_r \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \vec{V}_T = & - \left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & l \sin(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} + r \sin \gamma \dot{\varphi} \right] \vec{i}_{om} \\ & - \left[\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} \right] \vec{j}_{om} \end{aligned}$$

où $(\vec{i}_{om}, \vec{j}_{om})$ sont 2 vecteurs unitaires se déduisant de (\vec{i}_r, \vec{j}_r) par une rotation d'angle γ

$$\begin{aligned} \vec{i}_{om} &= \cos \gamma \vec{i}_r + \sin \gamma \vec{j}_r \\ \vec{j}_{om} &= -\sin \gamma \vec{i}_r + \cos \gamma \vec{j}_r \end{aligned} \quad (2.16)$$

Au vu de la définition de γ (voir page 21) et de (2.16), \vec{i}_{om} est le vecteur unitaire associé à la direction d'évolution libre et \vec{j}_{om} est le vecteur unitaire perpendiculaire à cette direction. Si la roue que nous considérons était réellement une roue fixe, alors les Hypothèses 2.2 assureraient que les 2 composantes de \vec{V}_T sont nulles. Cependant, comme nous avons supposé que cette roue fixe peut se déplacer "magiquement" selon la direction donnée par \vec{i}_{om} , les Hypothèses 2.2 ne conduisent plus qu'à une seule contrainte : la composante de \vec{V}_T selon \vec{j}_{om} est nulle, ce qui correspond bien à la contrainte donnée dans la Proposition 2.11

<1

2.3.2 Modèle cinématique

A la section 2.3.1, il a été montré qu'en raison de l'Hypothèse 2.2, chaque roue, quel que soit son type, donne lieu à un ensemble de contraintes portant sur la dérivée des coordonnées généralisées décrivant le robot (Propositions 2.8 à 2.11). Autrement dit, chaque roue limite les possibilités d'évolution des coordonnées généralisées. Dans cette section, nous caractérisons les possibilités d'évolution laissées libres. Cela constitue un premier modèle, appelé modèle cinématique, qui dans bien des cas, s'avère suffisant pour étudier un robot mobile à roues. Le modèle faisant intervenir les actionneurs du robot, appelé modèle dynamique, s'appuie du reste sur le modèle cinématique. Il sera donné à la section 2.3.3.

De façon plus précise, à la section 2.3.2.a, nous détaillons la construction du modèle cinématique pour un robot mobile quelconque. L'expression finale de ce modèle est donnée par le Théorème 2.2. Nous montrons ensuite que lorsqu'on ne souhaite étudier que la position et l'orientation du châssis (i.e. le vecteur ξ), ce qui est le cas dans la plupart des applications pratiques, il est possible d'isoler dans le modèle cinématique, un modèle cinématique réduit, et de ne travailler que sur ce dernier (Théorème 2.3). Enfin, à la section 2.3.2.b, nous prouvons (Théorème 2.6) que les modèles cinématiques réduits de tous les robots mobiles forment 5 classes d'équivalence : pour tout robot mobile, il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis de telle sorte que le modèle cinématique réduit du robot soit identique à celui de l'un des 5 robots-type, représentant chacune des classes. Ce théorème est particulièrement intéressant, car il en découle que le problème de la commande de l'ensemble des robots mobiles se ramène en définitive à celui de la commande de 5 robots-type. Un tableau synoptique, Tableau 2.1, présentant les caractéristiques et le modèle cinématique réduit de chaque robot-type, clôt cette section.

2.3.2.a Construction du modèle cinématique d'un robot mobile quelconque

Matrice des contraintes associées à un robot mobile

Considérons un robot tout à fait quelconque, c'est-à-dire équipé de $n = n^{di} + n^{de} + n^{fi} + n^{om}$ roues placées arbitrairement sur le châssis. Un vecteur de coordonnées généralisées permettant de repérer la configuration d'un tel robot est donné par la Proposition 2.7. Ce vecteur est soumis, Propositions 2.9 à 2.11, à un ensemble de contraintes. Une fois regroupées et ordonnées de façon judicieuse, celles-ci peuvent être présentées sous la forme matricielle suivante

Proposition 2.12 Contraintes sur les coordonnées généralisées d'un robot mobile

Sous les Hypothèses 2.1 et 2.2, les coordonnées généralisées d'un robot mobile quelconque doivent satisfaire les contraintes suivantes

$$A(q)\dot{q} = 0, \text{ i.e. } \begin{matrix} \xleftrightarrow{3} & n^{d_t} & n^{d_r} & n \\ \downarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ n \downarrow & \begin{pmatrix} A_{11}(\beta_i) R(\theta) & 0 & 0 & A_{14} \\ A_{21}(\beta_i) R(\theta) & 0 & A_{23} & 0 \\ A_{31}(\beta_i) R(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\beta}_{1,\dots,n^{d_t}} \\ \dot{\beta}_{n^{d_t}+1,\dots,n^{d_t}+n^{d_r}} \\ \dot{\varphi}_{1,\dots,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \uparrow 3 \\ \uparrow n^{d_t} \\ \uparrow n^{d_r} \\ \uparrow n \end{pmatrix} \\ n^{d_t} + n^{d_r} \downarrow & & & \end{matrix} = 0$$

avec

$$A_{11}(\beta_i) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_i + \beta_i) & \cos(\alpha_i + \beta_i) & l_i \cos \beta_i \\ -\sin(\alpha_i + \beta_i) & \cos(\alpha_i + \beta_i) & l_i \cos \beta_i \\ -\sin(\alpha_i + \beta_i) & \cos(\alpha_i + \beta_i) & l_i \cos \beta_i \\ -\sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) & \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) & l_i \cos(\beta_i + \gamma_i) \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n^{d_t} \\ \uparrow n^{d_r} \\ \uparrow n^{d_r} \\ \uparrow n^{d_r} \end{matrix} \begin{matrix} \forall i \in [1, n^{d_t}] \\ \forall i \in [n^{d_t}+1, n^{d_t}+n^{d_r}] \\ \forall i \in [n^{d_t}+n^{d_r}+1, n^{d_t}+n^{d_r}+n^{d_r}] \\ \forall i \in [n^{d_t}+n^{d_r}+n^{d_r}+1, n] \end{matrix}$$

$$A_{21}(\beta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i) & \sin(\alpha_i + \beta_i) & d_i + l_i \sin \beta_i \end{pmatrix} \uparrow n^{d_r} \quad \forall i \in [n^{d_t}+1, n^{d_t}+n^{d_r}]$$

$$A_{31}(\beta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i) & \sin(\alpha_i + \beta_i) & l_i \sin \beta_i \end{pmatrix} \uparrow n^{d_t} + n^{d_r} \quad \forall i \in [1, n^{d_t}] \cup [n^{d_t}+n^{d_r}+1, n^{d_t}+n^{d_r}+n^{d_r}]$$

$$A_{14} = \text{diag}(\underbrace{r, \dots, r}_{n-n^{d_r}}, r \cos \gamma_{n-n^{d_r}+1}, \dots, r \cos \gamma_n)$$

$$A_{23} = \text{diag}(d_{n^{d_t}+1}, \dots, d_{n^{d_t}+n^{d_r}})$$

□

Preuve : La preuve de la Proposition 2.12 est immédiate au vu des Propositions 2.8 à 2.11 ◁

Mise en évidence des possibilités d'évolution laissées libres

La structure très particulière de la matrice des contraintes $A(q)$, où de nombreux sous-blocs sont nuls, permet de caractériser très facilement les possibilités d'évolution des angles β_i et φ_i .

L'évolution des coordonnées généralisées $\beta_{n^{d_t}+1,\dots,n^{d_t}+n^{d_r}}$ et $\varphi_{1,\dots,n}$, décrivant respectivement l'orientation des roues désaxées et l'angle de rotation de toutes les roues, est *totalelement conditionnée* par l'évolution des coordonnées généralisées décrivant le châssis, c'est-à-dire ξ . En effet, puisque $d_i \neq 0 \quad \forall i \in [n^{d_t}+1, n^{d_t}+n^{d_r}]$ (Définition 2.4) et $\gamma_i \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \forall i \in [n-n^{d_r}+1, n]$ (relation 2.2), les deux sous-matrices constantes A_{14} et A_{23} sont de rang plein, et par conséquent inversibles. La structure triangulaire

supérieure de la matrice $A(q)$ permet alors d'établir sans difficulté que .

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_{n^d+1} \\ \dot{\beta}_{n^d+1, \dots, n^d+n^d} \end{pmatrix} = -A_{23}^{-1} A_{21}(\beta_i) R(\theta) \dot{\xi} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_n \end{pmatrix} = -A_{14}^{-1} A_{11}(\beta_i) R(\theta) \dot{\xi} \quad (2.18)$$

Au vu de (2.17) et (2.18), pour toute configuration q , la valeur de $\dot{\xi}$ détermine bien de façon unique les valeurs de $\dot{\beta}_{n^d+1, \dots, n^d+n^d}$ et de $\dot{\varphi}_{1, \dots, n}$.

L'évolution des coordonnées généralisées β_{1, \dots, n^d} , décrivant l'orientation des roues directrices, est à l'inverse *totalelement libre* : en effet, dans $A(q)$, les colonnes appelées à être multipliées par $\dot{\beta}_{1, \dots, n^d}$ ne sont composées que de zéros. Ce résultat est tout à fait naturel puisque l'axe (QS) est vertical, le point T , point de contact de la roue avec le sol, appartient à cet axe. Aussi, quelle que soit la vitesse $\dot{\beta}$ avec laquelle on fait tourner (QS) , la vitesse du point T n'est pas affectée. En particulier, si la vitesse \dot{V}_T est nulle, elle le restera quelle que soit la valeur de $\dot{\beta}$.

Donc, en définitive, pour caractériser les possibilités d'évolution du vecteur des coordonnées généralisées décrivant un robot mobile quelconque, il suffit de caractériser les possibilités d'évolution des 3 coordonnées généralisées décrivant le châssis, c'est-à-dire ξ . Les $n + n^d$ premières lignes de la matrice des contraintes $A(q)$ ne posent aucune restriction sur les possibilités d'évolution de ξ en effet, pour toute valeur de $\dot{\xi}$, il existe toujours une unique valeur de $\dot{\beta}_{n^d+1, \dots, n^d+n^d}$ et de $\dot{\varphi}_{1, \dots, n}$ telle que ces $n + n^d$ premières contraintes soient satisfaites (relations (2.17) et (2.18)). Par conséquent, les seules contraintes réellement limitantes sont les $n^d + n^d$ dernières de la matrice $A(q)$, qui conduisent à :

$$\dot{\xi} \in \Im m(R^{-1}(\theta)S(\beta_{1, \dots, n^d})) \quad (2.19)$$

avec

$$S(\beta_{1, \dots, n^d}) \triangleq (\ker A_{31}(\beta_{1, \dots, n^d})) \quad (2.20)$$

Lorsque le robot comporte des roues directrices, i.e. $n^d > 0$, la matrice $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^d})$ peut présenter des chutes de rang pour certaines valeurs de β_{1, \dots, n^d} (cf. expression de $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^d})$ donnée page 29). Le sous-espace vectoriel donnant les valeurs possibles pour $\dot{\xi}$ (relation (2.19)) n'est donc pas nécessairement de dimension constante pour toutes les orientations des roues directrices. Pour lever cette difficulté, nous ferons l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.3 $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^d})$ est de rang constant

Il est supposé qu'au cours de tous les déplacements du robot mobile, les valeurs prises par l'orientation des roues directrices β_{1, \dots, n^d} sont telles que la matrice $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^d})$ présente un rang constant. \square

Cette hypothèse est en fait très peu restrictive à la section 2.3.2.b, toutes les combinaisons possibles de roues sont passées en revue. Les seuls robots, parmi ceux présentant un intérêt pratique, pour lesquels $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ connaît des chutes de rang, sont les robots comportant 2 roues directrices et n^d roues désaxées. Pour ces robots, $A_{31}(\beta_1, \beta_2)$ est génériquement de rang 2, sauf pour quelques rares couples (β_1, β_2) où cette matrice est de rang 1 (voir discussion précédant l'Hypothèse 2.5). Les valeurs de (β_1, β_2) associées à une chute de rang étant très peu nombreuses, il n'est pas très contraignant de s'en priver. Il sera beaucoup plus simple, lors du calcul d'une loi de commande, de faire en sorte que ces quelques orientations des roues directrices soient évitées, plutôt que de chercher à gérer la chute de rang (ce problème de commande sera étudié en détail au Chapitre 4). L'Hypothèse 2.3 est donc tout à fait légitime.

En utilisant cette hypothèse dans la relation (2.19), nous obtenons que l'ensemble des valeurs pouvant être prises par $\dot{\xi}$ est explicitement donné par

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) S(\beta_{1,\dots,n^d}) \eta_m \quad (2.21)$$

avec η_m un vecteur de dimension $\text{Rang}(S(\beta_{1,\dots,n^d}))$ (dimension parfaitement définie au vu de l'Hypothèse 2.3) pouvant prendre n'importe quelle valeur.

Nécessité d'une coordination des roues directrices lorsque $n^{fi} + n^d \geq 3$

On déduit immédiatement de (2.21) et (2.20) que, pour qu'un robot mobile puisse bouger (i.e. $\dot{\xi} \neq 0$), il faut que $\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) \leq 2$. Au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, cette condition n'est généralement pas vérifiée dès que $n^d + n^{fi}$ est supérieur ou égal à 3. Il est cependant possible d'utiliser certains de ces robots en coordonnant l'orientation des roues directrices.

Plus précisément, soient $A_{31}^d(\beta_{1,\dots,n^d})$ et A_{31}^{fi} les 2 sous-matrices de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associées respectivement aux n^d roues directrices et n^{fi} roues fixes, i.e.

$$A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d}) = \begin{pmatrix} A_{31}^d(\beta_{1,\dots,n^d}) \\ A_{31}^{fi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n^d \\ \uparrow n^{fi} \end{matrix} \quad (2.22)$$

Si $\text{Rang}(A_{31}^{fi}) = 3$, alors de façon évidente

$$\forall \beta_{1,\dots,n^d} \quad \text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) = 3$$

Des robots présentant cette caractéristique sont donc condamnés à l'immobilité (relations (2.21) et (2.20)), et par là même, complètement inutiles. Par contre, lorsque $\text{Rang}(A_{31}^{fi}) \leq 2$, il existe toujours, quel que soit le nombre de roues directrices n^d , un ensemble noté \mathcal{O} de valeurs de β_{1,\dots,n^d} tel que

$$\forall \beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O} \quad \text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) \leq 2 \quad (2.23)$$

Ce résultat peut être prouvé, soit de manière calculatoire en montrant que l'équation $\det(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) = 0$ admet toujours des solutions, soit en utilisant la notion de centre instantané de rotation, définie ci-dessous (Théorème 2.4). Nous avons privilégié cette seconde approche, car elle est met en œuvre beaucoup moins de calculs. La preuve de

l'existence de l'ensemble \mathcal{O} sera donc donnée plus loin dans ce mémoire elle apparaît comme une conséquence naturelle de la Proposition 2.13.

Puisqu'initialement il n'y avait aucune restriction sur l'évolution de β_{1,\dots,n^d} ($\dot{\beta}_{1,\dots,n^d}$ est a priori totalement libre, voir discussion ci-dessus), l'utilisateur peut toujours restreindre celle-ci comme suit

Hypothèse 2.4 Contrainte de coordination des roues directrices

Les valeurs prises par $\dot{\beta}_{1,\dots,n^d}$ sont telles que β_{1,\dots,n^d} reste continûment dans \mathcal{O} □

L'Hypothèse 2.4, au vu de (2.23), (2.19) et (2.20), permet bien au robot de bouger. Si on note \tilde{n}^d la dimension de \mathcal{O} , il découle clairement de l'Hypothèse 2.4 que seule l'évolution de \tilde{n}^d composantes de β_{1,\dots,n^d} peut encore être totalement libre, et conditionne complètement l'évolution des $n^d - \tilde{n}^d$ autres, i.e. après éventuellement une renumérotation des roues directrices :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{\tilde{n}^d} \end{pmatrix} \quad \text{quelconques} \quad (2.24)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_{\tilde{n}^d+1} \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{n^d} \end{pmatrix} = N(\beta_{1,\dots,n^d}) \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{\tilde{n}^d} \end{pmatrix}$$

avec $N(\beta_{1,\dots,n^d})$ une matrice $n^d - \tilde{n}^d \times \tilde{n}^d$ à déterminer. Le choix des \tilde{n}^d coordonnées généralisées $\beta_i, i \in [1, \tilde{n}^d]$ conditionnant l'évolution du vecteur complet β_{1,\dots,n^d} est très important, puisqu'il peut conduire à plus ou moins de singularités dans la représentation des possibilités d'évolution de ces coordonnées. Un choix original permettant de réduire au strict minimum le nombre de singularités sera présenté à la section 2.4.

Modèle cinématique

Nous pouvons maintenant écrire le modèle cinématique d'un robot quelconque. Auparavant, nous introduisons juste les 2 définitions suivantes, de façon à employer par la suite le même vocabulaire que celui utilisé dans [CBA93] .

Définition 2.6 Degré de mobilité

On appelle *degré de mobilité* d'un robot mobile à roues, noté δ_m , le nombre de composantes parmi celles décrivant le châssis, qui peuvent évoluer de manière indépendante.

Au vu de (2.21) et (2.20), $\delta_m = \text{Rang}(S(\beta_{1,\dots,n^d}))$ □

Définition 2.7 Degré d'orientabilité

On appelle *degré d'orientabilité* d'un robot mobile à roues, noté δ_o , le nombre de roues directrices pouvant être orientées de manière indépendante, sans jamais bloquer le déplacement du robot.

Au vu de la discussion précédente

- lorsque $n^d + n^f < 3$, $\delta_o = n^d$,

lorsque $n^{di} + n^{fi} \geq 3$, $\delta_o = \bar{n}^{di}$ □

Ces 2 définitions seront illustrées sur de nombreux exemples de robots mobiles à la section 2.3.2.b. Elles permettent de rendre plus clair l'énoncé du théorème principal

Théorème 2.2 *Modèle cinématique d'un robot mobile quelconque*

Les possibilités d'évolution du vecteur des coordonnées généralisées décrivant un robot mobile quelconque sont données par

$$n^{di} \begin{cases} 3 \uparrow \\ \delta_o \downarrow \\ n^{de} \downarrow \\ n \downarrow \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = R^{-1}(\theta)S(\beta_{1,\dots,n^{di}})\eta_m \\ \dot{\beta}_{1,\dots,\delta_o} = \eta_o \\ \dot{\beta}_{\delta_o+1,\dots,n^{di}} = N(\beta_{1,\dots,n^{di}})\eta_o \\ \dot{\beta}_{n^{di}+1,\dots,n^{di}+n^{de}} = A_{23}^{-1}A_{21}(\beta_i)S(\beta_{1,\dots,n^{di}})\eta_m \\ \dot{\varphi}_{1,\dots,n} = A_{14}^{-1}A_{11}(\beta_i)S(\beta_{1,\dots,n^{di}})\eta_m \end{array} \right. \quad (2.25)$$

avec η_m et η_o , 2 vecteurs de dimension respective δ_m et δ_o , pouvant prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^{\delta_m} \times \mathbb{R}^{\delta_o}$. Le système d'équations (2.25) est appelé *modèle cinématique du robot mobile*. □

Preuve : La Preuve du Théorème 2.2 est immédiate au vu des relations (2.17), (2.17), (2.21) et (2.24), et des Définitions 2.7 et 2.6. ◁

Dans le cadre d'une application pratique, on ne cherche pas à contrôler toutes les coordonnées généralisées : dans la très grande majorité des cas, seules la position et l'orientation du châssis, c'est-à-dire le vecteur ξ , présentent un intérêt pour l'utilisateur du robot mobile. Dans ces conditions, il est tout à fait possible de ne pas prendre en considération certaines coordonnées généralisées. Plus précisément, dans l'expression de $\dot{\xi}$ donnée dans (2.25), seules apparaissent les coordonnées généralisées θ (i.e. l'une des composantes de ξ) et $\beta_{1,\dots,n^{di}}$. On peut en fait, être encore plus précis et montrer que $S(\beta_{1,\dots,n^{di}})$ peut être écrit $S(\beta_{1,\dots,\delta_o})$. La preuve utilise encore une fois la notion de centre instantané de rotation et sera donc donnée plus loin dans ce mémoire (lors de l'étude des robots des classes \mathcal{R}_1^1 et \mathcal{R}_2^1 , relations (D.14) et (2.34)). L'expression de $\dot{\xi}$ ne fait donc apparaître en définitive que θ et β_{1,\dots,δ_o} . Comme l'expression de $\dot{\beta}_{1,\dots,\delta_o}$ (équation (2.25)) ne fait elle-même apparaître aucune coordonnée généralisée, on peut donc extraire du modèle cinématique (2.25) les équations décrivant les évolutions possibles de ξ et β_{1,\dots,δ_o} , et les étudier isolément. Ce sous-modèle est dit *modèle cinématique réduit*

Théorème 2.3 *Modèle cinématique réduit d'un robot mobile quelconque*

Pour un robot mobile quelconque, les possibilités d'évolution des coordonnées généralisées utiles du point de vue de la commande sont données par

$$\begin{matrix} 3 \uparrow \\ \delta_o \downarrow \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = R^{-1}(\theta)S(\beta_{1,\dots,\delta_o})\eta_m \\ \dot{\beta}_{1,\dots,\delta_o} = \eta_o \end{array} \right. \quad (2.26)$$

avec η_m et η_o , 2 vecteurs de dimension respective δ_m et δ_o , pouvant prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^{\delta_m} \times \mathbb{R}^{\delta_o}$. Le système d'équations (2.26) est appelé *modèle cinématique réduit du robot mobile*. □

Preuve : La Preuve du Théorème 2.3 est immédiate au vu du Théorème 2.2 et des relations (D.14) et (2.34) données plus loin dans ce mémoire. \triangleleft

Etant donné que notre objectif est de contrôler uniquement le vecteur ξ , nous ne considérerons plus dans la suite de ce mémoire que le modèle cinématique réduit d'un robot mobile. Il n'y a pas pour autant de perte d'information si besoin était (par exemple pour réaliser une animation graphique du déplacement du robot mobile), il reste possible, à partir de l'évolution des coordonnées généralisées du modèle cinématique réduit ξ et β_{1,\dots,δ_o} , de calculer l'évolution des coordonnées généralisées restantes $\beta_{\delta_o+1,\dots,n^{de}+n^{de}}$ et $\varphi_{1,\dots,n}$: il suffit pour cela d'intégrer les $n^{de} - \delta_o + n^{de} + n$ dernières équations du modèle cinématique complet (2.25). Les expressions des différentes matrices intervenant dans ces équations sont données dans ce mémoire : les expressions de $A_{11}(\beta_i)$, $A_{21}(\beta_i)$, A_{14} et A_{23} ont été données page 29, les expressions de $S(\beta_{1,\dots,n^{de}})$ et $R(\theta)$ ont été données respectivement par (2.20) et (2.13), enfin une expression pour $N(\beta_{1,\dots,n^{de}})$ est donnée à la section 2.4.

2.3.2.b Mise en évidence de cinq classes de robots mobiles

Le Théorème 2.3 donne l'expression explicite du modèle cinématique réduit de n'importe quel robot mobile. Nous montrons maintenant que ces modèles forment 5 classes d'équivalence, caractérisées chacune par une valeur du couple (δ_m, δ_o) . Plus précisément, nous montrons, Théorème 2.5, que le couple (δ_m, δ_o) associé à un robot mobile quelconque ne peut prendre que 5 valeurs, puis, Théorème 2.6, que si 2 robots mobiles notés \mathcal{R}^A et \mathcal{R}^B ont même couple (δ_m, δ_o) , alors il est toujours possible de choisir sur le châssis du robot \mathcal{R}^B , un repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]^B$ tel que le modèle cinématique réduit de \mathcal{R}^B soit identique à celui du robot \mathcal{R}^A .

Ces résultats sont particulièrement intéressants dans l'optique du calcul d'une loi de commande : ils montrent que sous les Hypothèses 2.1 et 2.2, la commande de l'ensemble des robots mobiles à roues se résume en fait à 5 cas de figure différents. Ces résultats ont été prouvés dans [TAM92b] et [CBA93]. Dans [TAM92b], seul le cas des robots équipés uniquement de 3 roues était étudié. Le degré de mobilité était appelé degré de liberté sur le corps et le degré d'orientabilité était remplacé par le nombre de roues directrices, ce qui est presque équivalent lorsque $n = 3$: cela conduit juste au dédoublement, inutile, d'une des classes. Les degrés de mobilité et d'orientabilité ont été introduits dans [CBA93], et ont permis de présenter une classification complète de tous les robots mobiles, quel que soit le nombre de roues dont ils sont équipés. C'est cette classification que nous donnons dans cette section. La présentation est basée sur les 2 références mentionnées ci-dessus.

Centre instantané de rotation

Les Théorèmes 2.5 et 2.6 peuvent être prouvés en raisonnant uniquement sur la matrice des contraintes $A(q)$, dont l'expression est donnée à la Proposition 2.12. Cependant, afin d'éviter des calculs de déterminant, de rang, particulièrement fastidieux, nous nous appuyons également sur une notion très classique en Mécanique, celle du centre instantané de rotation. Cette notion, en permettant des raisonnements purement géométriques, simplifie significativement ces 2 preuves. Nous l'utiliserons encore, d'une manière plus

directe cette fois, à la section 2.4 pour proposer un second modèle pour les robots équipés de plusieurs roues directrices.

L'existence d'un centre instantané de rotation est assuré, pour tout corps rigide, par le Principe de Descartes. Nous rappelons tout d'abord l'énoncé général de ce Principe (Théorème 2.4), puis nous montrons comment il peut être particularisé dans le cas des robots mobiles à roues (Proposition 2.13).

Théorème 2.4 Principe de Descartes énoncé général

A chaque instant, le mouvement d'un corps rigide est :

soit une translation,

- *soit une rotation autour d'un point appelé centre instantané de rotation (CIR). □*

Le châssis d'un robot mobile étant supposé rigide, Hypothèse 2.1.2, il obéit au Principe de Descartes. La loi de composition des vitesses que nous avons utilisée à la section 2.3.1 (Théorème 2.1) est l'une des conséquences de ce Principe. Une seconde est qu'il conduit à un ensemble de contraintes géométriques sur les orientations possibles des roues directrices et des roues fixes. Avant d'énoncer ce résultat, qui sera utilisé abondamment dans cette section et à la section 2.4, nous introduisons la notation suivante :

Définition 2.8 Droite Δ_i associée à une roue

Dans la suite de ce mémoire, Δ_i désignera la droite perpendiculaire à la roue i , passant par le centre de celle-ci, i.e. par S_i . □

Proposition 2.13 Principe de Descartes . conséquence sur l'orientation des roues directrices et des roues fixes d'un robot mobile

Pour qu'un robot mobile à roues, satisfaisant aux Hypothèses 2.1 et 2.2, puisse bouger, il faut que l'une des 2 conditions ci-dessous soit vérifiée :

- *soit les droites Δ_i associées aux roues directrices et aux roues fixes sont concourantes. Le mouvement instantané associé à une telle orientation des roues est une rotation autour de l'intersection de toutes ces droites (qui est donc CIR).*

soit les droites Δ_i associées aux roues directrices et aux roues fixes sont parallèles. 2 cas de figure peuvent se présenter

- *les Δ_i associées aux roues directrices et aux roues fixes sont toutes superposées. Dans ce cas, il existe une infinité de mouvements instantanés possibles : soit une rotation autour de n'importe quel point des droites Δ_i associées aux roues directrices et aux roues fixes, soit une translation dans la direction donnée par l'orientation des roues directrices et des roues fixes.*

les Δ_i associées aux roues directrices et aux roues fixes ne sont pas toutes superposées. Cette orientation des roues ne permet qu'un seul mouvement instantané : une translation dans la direction donnée par l'orientation des roues directrices et des roues fixes. □

Preuve : considérons tout d'abord un corps rigide quelconque. Soit I un entier strictement positif, $\{P_i, i \in [1, \dots, I]\}$ un ensemble de points sur ce corps rigide, et $\vec{V}_{P_i, i \in [1, \dots, I]}$ les vecteurs vitesse linéaire en chaque point P_i . Le Principe de Descartes (Théorème 2.4) assure qu'à chaque instant, le mouvement de ce corps est soit une translation, soit une rotation autour d'un point appelé *CIR*. Nous montrons, en considérant successivement les 2 possibilités, que ce théorème engendre un ensemble de contraintes sur l'orientation des vecteurs $\vec{V}_{P_i, i \in [1, \dots, I]}$.

dans le cas d'une translation, le vecteur vitesse instantanée de rotation, noté $\vec{\omega}$ dans le Théorème 2.1, est nul

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad (2.27)$$

En reportant (2.27) dans (2.3), nous en déduisons immédiatement que les vecteurs vitesse linéaire en chaque point du corps rigide, et donc en particulier aux points $\{P_i\} i \in [1, \dots, I]$, sont égaux.

→ Dans le cas d'une translation, les vecteurs $\vec{V}_{P_i, i \in [1, \dots, I]}$ sont tous parallèles et ont même norme.

dans le cas maintenant où le mouvement instantané est une rotation, faisons jouer au *CIR* le rôle du point B dans le Théorème 2.1. Par définition du CIR :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{CIR} = \vec{0} \quad (2.28)$$

En reportant (2.28) dans (2.3), nous obtenons que le vecteur vitesse linéaire en chaque point A quelconque du corps rigide, et donc en particulier aux points $\{P_i\} i \in [1, \dots, I]$, est perpendiculaire à $\overrightarrow{CIR A}$.

→ Dans le cas d'une rotation, les vecteurs $\vec{V}_{P_i, i \in [1, \dots, I]}$ sont perpendiculaires à la droite joignant P_i au CIR.

Dans ce second cas de figure, les vecteurs $\vec{V}_{P_i, i \in [1, \dots, I]}$ ne sont généralement pas parallèles. Cela ne sera le cas que dans une seule situation : les points $\{P_i, i \in [1, \dots, I]\}$ sont alignés et le *CIR* appartient à la droite formée par les $\{P_i\}$.

Particularisons maintenant ces résultats au cas des robots mobiles à roues. Nous noterons \mathcal{I} , l'ensemble des index associés aux roues directrices et aux roues fixes :

$$\mathcal{I} = \{1, \dots, n^{di}\} \cup \{n^{di} + n^{de} + 1, \dots, n^{di} + n^{de} + n^{fi}\}$$

Puisque les centres $S_i, i \in \mathcal{I}$ des roues directrices et des roues fixes sont des points immobiles par rapport au châssis (cf. Définitions 2.2 et 2.3), et que ce dernier est supposé rigide (Hypothèse 2.1.2), la vitesse linéaire aux points $S_i, i \in \mathcal{I}$ doit satisfaire les contraintes présentées dans le paragraphe précédent. Or, sous l'hypothèse de roulement pur sans glissement (Hypothèse 2.2), la vitesse linéaire au centre d'une roue appartient nécessairement au plan de la roue : en effet, puisque \vec{V}_T , vitesse du point de contact d'une roue avec le sol est supposée nulle (Hypothèse 2.2), la relation (2.4) conduit à $\vec{V}_S = r\dot{\varphi}\vec{j}_r$, avec \vec{j}_r le vecteur horizontal appartenant au plan de la roue, voir Figure 2.7. Nous en déduisons que

pour qu'il y ait translation, il faut nécessairement que les roues directrices et les roues fixes soient parallèles,

pour qu'il y ait rotation autour d'un CIR, ce dernier doit appartenir à toutes les droites $\Delta_i, i \in \mathcal{I}$. Celles-ci doivent donc nécessairement être soit concourantes, soit superposées.

Cela termine la preuve de la Proposition 2.13. \triangleleft

Il n'existe par contre, aucune contrainte sur l'orientation des roues désaxées et des roues omnidirectionnelles.

Dans le cas des roues désaxées, cela tient au fait que leur centres $S_{i, i \in [n^{dx}+1, \dots, n^{dx}+n^{dx}]}$ ne sont pas immobiles par rapport au châssis. Leur vitesses linéaires n'ont donc pas à satisfaire aux contraintes découlant du Principe de Descartes.

Dans le cas des roues omnidirectionnelles, cela découle du fait qu'elles ont été construites de telle sorte que le vecteur vitesse linéaire en leur centre n'appartienne pas nécessairement au plan de la roue. La fin de la preuve de la Proposition 2.13 ne peut donc pas leur être appliquée.

Nous avons déjà prouvé, à la section précédente, que pour qu'un robot mobile puisse bouger, les orientations $\beta_i, i \in \mathcal{I}$ des roues directrices et des roues fixes ne pouvaient pas être quelconques : au vu de (2.19) et (2.20), ξ ne peut être différent de zéro que si les orientations $\beta_i, i \in \mathcal{I}$ sont telles que $\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{dx}})) \leq 2$. La Proposition 2.13 établit le même résultat par une approche différente. L'avantage de cette seconde approche est qu'elle fournit sans calcul la liste explicite des orientations $\beta_i, i \in \mathcal{I}$ permettant un mouvement du robot. Cette information supplémentaire simplifie significativement les preuves des Théorèmes 2.5 et 2.6.

Description des 5 classes de robots mobiles

Théorème 2.5 (δ_m, δ_o) ne peut prendre que 5 valeurs

Quel que soit le robot mobile considéré, le couple (δ_m, δ_o) qui lui est associé ne peut prendre que 5 valeurs. Ces 5 possibilités sont :

$$(\delta_m, \delta_o) \in \{(3, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 1), (1, 2)\}$$

\square

Preuve : Le degré de mobilité δ_m est par définition le rang de la matrice $S(\beta_{1, \dots, n^{dx}}) = \ker(A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{dx}}))$ (Définition 2.6 et relation (2.20)). $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{dx}})$ étant de dimension $(n^{dx} + n^{dx}) \times 3$ (cf. expression de cette matrice donnée page 29), δ_m est nécessairement inférieur ou égal à 3. De plus, afin qu'un robot puisse bouger, i.e. $\xi \neq 0$, il faut que δ_m soit strictement positif (relations (2.25) ou (2.26)). Nous en déduisons donc que, quel que soit le robot mobile considéré, son degré de mobilité vérifie

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (2.29)$$

Le degré d'orientabilité δ_o est, Définition 2.7, le nombre de roues directrices pouvant être orientées indépendamment sans bloquer le robot. En utilisant la Proposition 2.13, on montre que δ_o vérifie

$$0 \leq \delta_o \leq 2 \quad (2.30)$$

La preuve de cette relation, pour être parfaitement rigoureuse, requiert une énumération de situations. Afin de ne pas alourdir cette section, nous donnons cette preuve en annexe, section D.1.1.

Au vu des inégalités (2.29) et (2.30), 9 couples (δ_m, δ_o) peuvent a priori être formés. Cependant, on montre facilement que

les couples $(\delta_m, \delta_o) \in \{(3, 1), (3, 2), (2, 2)\}$ ne correspondent pas à des robots réels,

le couple $(\delta_m, \delta_o) = (1, 0)$ est associé à des robots ne présentant aucun intérêt pratique.

Nous avons également reporté en annexe, section D.1.2, tous les détails prouvant cette affirmation. Celle-ci termine la preuve du Théorème 2.5 : le couple (δ_m, δ_o) associé à un robot mobile ne peut effectivement prendre que les 5 valeurs énumérées dans l'énoncé de ce dernier. \triangleleft

Théorème 2.6 Les modèles cinématiques réduits de tous les robots mobiles forment 5 classes d'équivalence

Sous les Hypothèses 2.1 et 2.2, les modèles cinématiques réduits de l'ensemble des robots mobiles à roues forment 5 classes d'équivalence, caractérisées chacune par une valeur du couple (δ_m, δ_o) .

Pour repérer ces 5 classes, la notation "classe $\mathcal{R}_{\delta_o}^{\delta_m}$ " sera utilisée. La composition de chaque classe d'équivalence, ainsi qu'une expression possible du modèle cinématique réduit pour chacune d'entre elles, est donné de façon synoptique sur le Tableau 2.1 à la fin de cette section. \square

Présentation globale de la preuve du Théorème 2.6 :

La preuve du Théorème 2.6 ne présente pas de difficultés particulières. Il faut simplement, pour être parfaitement rigoureux, envisager successivement un grand nombre de cas de figure. Plus précisément, pour les 5 couples (δ_m, δ_o) mis en évidence au Théorème 2.5, il faut rechercher l'ensemble des robots mobiles qui présentent ces degrés de mobilité et d'orientabilité, puis montrer pour chacun de ces robots, qu'il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ de telle sorte que leurs modèles cinématiques réduits soient tous identiques. Comme tous les robots mobiles auront été passés en revue (Théorème 2.5 les degrés de mobilité et d'orientabilité d'un robot mobile ne peuvent prendre que 5 valeurs), le Théorème 2.6 est alors prouvé.

Dans cette section, nous ferons cette démarche uniquement pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , d'une part, parce qu'en raison de leurs singularités, c'est leur modélisation qui est la

plus délicate, et d'autre part, parce que c'est essentiellement la commande de ces robots que nous étudierons dans le Chapitre 4. La fin de la preuve du Théorème 2.6, c'est-à-dire l'étude des 4 autres classes, est donnée en annexe, section D.2. \square

Etude détaillée de la classe \mathcal{R}_2^1

Résultat préliminaire

Le degré de mobilité δ_m associé à un robot est, Définition 2.6 et relation (2.20), le rang du noyau de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$. Pour nous permettre de le calculer, nous aurons besoin du résultat suivant

Proposition 2.14 Colinéarité de 2 lignes dans la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$

2 lignes de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ sont colinéaires si et seulement si les 2 roues auxquelles ces lignes sont associées sont orientées de telle sorte que leur droites Δ_i sont superposées.

\square

Preuve : La preuve de la Proposition 2.14 est donnée en annexe, section D.2.1. \triangleleft

Description des robots de la classe \mathcal{R}_2^1

Proposition 2.15 Robots appartenant à la classe \mathcal{R}_2^1

La classe \mathcal{R}_2^1 est constituée par l'ensemble des robots mobiles comportant

- aucune roue fixe ($n^f = 0$),
- $n^d \geq 2$ roues directrices, deux d'entre elles pouvant être orientées indépendamment, les $n^d - 2$ autres leur étant coordonnées,
- enfin, un nombre quelconque de roues désaxées ou de roues omnidirectionnelles, puisque ces roues ne restreignent pas l'évolution d'un robot (relation 2.17). \square

Preuve : Nous montrons d'abord que $n^f = 0$ et $n^d \geq 2$ sont des conditions nécessaires pour qu'un robot mobile appartienne à la classe \mathcal{R}_2^1 , puis que ces conditions sont suffisantes.

Nécessité il est immédiat qu'un robot appartenant à la classe \mathcal{R}_2^1 comporte au moins 2 roues directrices (puisque son degré d'orientabilité δ_o doit être égal à 2 Définition 2.7).

Pour montrer maintenant qu'il ne peut pas posséder de roue fixe, raisonnons par l'absurde considérons un robot comportant 2 roues directrices, numérotées 1 & 2, et 1 roue fixe numérotée 3.

Tout d'abord, il est clair qu'un tel robot ne présente un intérêt pratique, que si S_1 et S_2 n'appartiennent pas à la droite Δ_3 en effet, si par exemple $S_1 \in \Delta_3$, alors Δ_1 et Δ_3 sont sécantes en S_1 pour toutes les orientations β_1 de la roue 1, sauf pour une seule, pour laquelle Δ_1 et Δ_3 sont superposées. Au vu de la Proposition 2.13, pour toutes les orientations β_1 de la roue 1 sauf une, ce robot ne peut donc effectuer qu'un

seul mouvement : une rotation autour de S_1 . Ces possibilités d'évolution sont de façon évidente beaucoup trop réduites pour qu'un tel robot puisse être utilisé dans le cadre d'une application pratique. La seule possibilité pour exploiter ce robot serait de bloquer l'orientation de la roue 1 sur la valeur β_1 correspondant à la superposition de Δ_1 et Δ_3 . Mais dans ce cas, la roue 1 ne serait plus directrice, ce serait une roue fixe. Aussi, afin de ne pas compliquer inutilement la classification des robots avec des robots anecdotiques, nous supposons que les centres des roues directrices n'appartiennent jamais aux droites Δ_i associées aux roues fixes.

Nous pouvons finir maintenant notre raisonnement par l'absurde : isolons au sein de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associée à un robot comportant 2 roues directrices et une roue fixe, les lignes 1 et 3, c'est-à-dire celles correspondant à l'une des roues directrices et à la roue fixe. Puisque nous supposons que S_1 n'appartient pas à Δ_3 , les droites Δ_1 et Δ_3 , quelle que soit l'orientation de la roue 1, ne seront jamais superposées. La Proposition 2.14 établit alors que les lignes 1 et 3 de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ sont de rang constant 2. On en déduit, Proposition 2.13, que l'orientation de la roue directrice 2 ne peut pas être indépendante de celle de la roue 1

si la roue 1 est parallèle à la roue 3, la roue 2 doit également leur être parallèle,

si les droites Δ_1 et Δ_3 sont sécantes, alors l'orientation de la roue 2 doit être telle que Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 soient concourantes.

Un robot comportant 2 roues directrices et une roue fixe ne peut pas par conséquent présenter un degré d'orientabilité δ_o égal à 2; il n'appartient donc pas à la classe \mathcal{R}_2^1 .

Suffisance : Nous montrons maintenant que tous les robots pour lesquels $n^d \geq 2$ et $n^f = 0$ prennent place effectivement dans la classe \mathcal{R}_2^1 , mais que certains d'entre eux présentent des singularités incontournables.

Lors de la preuve de la relation (2.30), donnée en annexe, section D.1.1, il est montré que tous les robots pour lesquels $n^d \geq 2$ et $n^f = 0$ présentent effectivement un degré d'orientabilité δ_o égal à 2. Il nous faut donc juste montrer que leur degré de mobilité δ_m est égal à 1. Considérons successivement les 2 possibilités suivantes

$n^d \geq 3$ et les centres des roues directrices ne sont pas tous alignés : dans ce cas de figure, les droites Δ_i associées aux roues directrices ne peuvent pas être toutes superposées. La Proposition 2.14 assure alors que $\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) > 1$. Or, comme l'orientation de $n^d - 2$ roues directrices est coordonnée de façon que le robot puisse bouger, $\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d}))$ vérifie également

$$\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})) \leq 2 \quad (2.31)$$

On en déduit que δ_m est bien égal à 1

$n^d = 2$ ou $n^d \geq 3$ mais les centres des roues directrices sont tous alignés : la relation (2.31) est toujours vérifiée. Par contre, il existe cette fois une unique orientation des roues directrices telle que les droites Δ_i qui leur sont associées sont toutes superposées. Cela implique, Proposition 2.14, que pour cette seule configuration, la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ est de rang 1. Cette singularité est inhérente à ces robots. Elle traduit le fait que

pour toutes les orientations coordonnées des roues directrices, excepté l'orientation singulière, le mouvement instantané du robot est complètement défini c'est soit une translation dans la direction donnée par l'orientation des roues directrices, soit une rotation autour d'un *CIR* défini de manière unique (intersection des Δ_i associées aux roues directrices),

à l'inverse, lorsque l'orientation des roues directrices correspond à la singularité, il existe pour le robot une infinité de mouvements instantanés possibles soit une translation dans la direction donnée par les roues directrices, soit une rotation autour de n'importe quel point des droites Δ_i .

Un modèle rendant compte de cette rupture dans les possibilités d'évolution de ces robots, serait assurément très complexe. Aussi, étant donné qu'elle n'est associée qu'à une *unique* orientation des roues directrices, nous ferons l'hypothèse que cette orientation singulière n'est jamais rencontrée.

Hypothèse 2.5 Singularité intrinsèque de certains robots \mathcal{R}_2^1

Dans le cas des 2 groupes de robots \mathcal{R}_2^1 décrits ci-dessous

robots ne comportant que 2 roues directrices,

robots comportant $n^{dt} \geq 3$ roues directrices, et pour lesquels les centres de toutes les roues directrices sont toutes alignés,

nous supposons que l'orientation des roues directrices correspondant au cas de figure où les droites Δ_i associées aux roues sont toutes superposées, n'est jamais rencontrée. \square

L'Hypothèse 2.5 garantit que dans le cas des robots pour lesquels $n^{dt} = 2$ ou $n^{dt} \geq 3$ mais les centres des roues directrices sont alignés, la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{dt}})$ est encore une fois constamment de rang 2. Cela termine la preuve de la Proposition D.7. \triangleleft

Puisque l'orientation singulière des roues directrices est unique, l'Hypothèse 2.5 est très peu restrictive. Elle impose juste un surcroît de travail lors de la synthèse d'une loi de commande il faut que celle-ci soit construite de telle sorte que l'orientation singulière des roues directrices ne soit jamais rencontrée. Plusieurs techniques permettant de traiter cette difficulté spécifique aux robots de la classe \mathcal{R}_2^1 seront présentées au Chapitre 4. Il est à noter que ces robots sont les seuls, parmi ceux qui ne sont pas anecdotiques, pour lesquels la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{dt}})$ n'est pas de rang constant (voir la description des autres classes de robots, section D.2) Comme, la chute de rang n'intervient que pour une unique orientation des roues directrices, l'Hypothèse 2.3 était donc tout à fait réaliste.

Modèle cinématique réduit représentatif de la classe \mathcal{R}_2^1

Au vu de ce qui a été dit précédemment, la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{dt}})$ associée à un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 se présente sous la forme d'une matrice $n^{dt} \times 3$, avec $n^{dt} \geq 2$, et est de rang 2 pour toutes les orientations $\beta_{1,\dots,n^{dt}}$ des roues directrices, sauf lorsque le robot considéré est l'un des robots décrits à l'Hypothèse 2.5. Dans ce dernier cas, $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{dt}})$ est encore

de rang 2, sauf pour une unique orientation β_{1,\dots,n^*} des roues directrices, où son rang chute à 1.

Il n'est cependant pas possible, quel que soit le robot de la classe \mathcal{R}_2^1 considéré, de sélectionner 2 lignes de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$ qui soient constamment de rang 2. En effet, quelle que soit la localisation de 2 roues directrices i_1 et i_2 sur le châssis du robot, il existe toujours une unique orientation $(\beta_{i_1}, \beta_{i_2})$ de ces 2 roues telle que Δ_{i_1} et Δ_{i_2} soient superposées, et donc, Proposition 2.14, telle que les lignes i_1 et i_2 deviennent colinéaires. Par conséquent, si on calcule le noyau $S(\beta_{1,\dots,n^*})$ de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$ en ne considérant que 2 lignes de cette matrice, on obtiendra nécessairement une singularité pour l'une des orientations β_{1,\dots,n^*} des roues directrices.

Dans le cas des robots décrits à l'Hypothèse 2.5, cette singularité était attendue; elle correspond à la singularité intrinsèque de ces robots (cf. Hypothèse 2.5). Par conséquent, on peut tout à fait calculer $S(\beta_{1,\dots,n^*})$ de cette manière pour écrire le modèle cinématique réduit de ces robots (équation (2.26)); on n'introduit pas de singularité supplémentaire. Par contre, en procédant ainsi avec les autres robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , on introduit cette fois dans leur modèle cinématique réduit, une singularité qui n'a aucune réalité physique; le modèle ainsi obtenu ne décrirait donc qu'imparfaitement les possibilités d'évolution du robot.

Dans [CBA93], les auteurs ont cependant proposé de calculer $S(\beta_{1,\dots,n^*})$ en ne considérant que 2 lignes de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$. Le modèle cinématique réduit est alors très simple, ce qui est un grand avantage dans l'optique de la synthèse d'une loi de commande. Il comporte bien sûr, une singularité de modélisation, mais celle-ci étant isolée (elle ne correspond qu'à une orientation unique $(\beta_{i_1}, \beta_{i_2})$ des roues directrices orientées indépendamment), il n'est pas très restrictif de construire la loi de commande de telle sorte que cette orientation singulière ne soit jamais rencontrée. Enfin, en procédant ainsi, les modèles cinématiques réduits de tous les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , y compris ceux des robots décrits à l'Hypothèse 2.5, pourront être identiques, c'est-à-dire la classe \mathcal{R}_2^1 sera bien une classe d'équivalence. Nous donnons la modélisation de [CBA93] ci-dessous

Hypothèse 2.6 Singularité des robots \mathcal{R}_2^1 introduite par la modélisation proposée dans [CBA93]

Pour tous les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , nous supposons que l'orientation des roues directrices 1 et 2 correspondant au cas de figure où Δ_1 et Δ_2 sont superposées, n'est jamais rencontrée. Dans le cas particulier des robots décrits à l'Hypothèse 2.5, cette singularité coïncide avec la singularité intrinsèque de ces robots. \square

A la section 2.4, nous proposerons une seconde modélisation de ces robots. Celle-ci comporte également une singularité de modélisation, mais d'une part, les possibilités d'évolution des robots seront moins réduites (la singularité n'est associée qu'à n^d positions du CIR, contre une infinité avec la modélisation proposée dans [CBA93]), et d'autre part, cette singularité correspond à des orientations des roues directrices qui certes ne bloquent pas le robot, mais qu'il vaut toutefois mieux éviter pour des raisons purement pratiques (elles risquent d'amener les actionneurs à saturation).

Nous pouvons maintenant montrer sans difficulté que la classe \mathcal{R}_2^1 est bien une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6

Proposition 2.16 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

Quel que soit le robot de la classe \mathcal{R}_2^1 considéré, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis de ce robot est choisi comme suit :

P : point à mi-distance des centres S_1 et S_2 des roues directrices orientées indépendamment,

\vec{i} dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{S_2 S_1}$. Le vecteur \vec{j} est alors complètement défini (ce repère est présenté à la Figure 2.12 sur un exemple de robot \mathcal{R}_2^1).

alors un modèle cinématique réduit s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ L \sin(\beta_1 + \beta_2) \\ \sin(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix} \eta_m \\ \dot{\beta}_1 = \eta_{o_2} \\ \dot{\beta}_2 = \eta_{o_2} \end{cases} \quad (2.32)$$

La classe \mathcal{R}_2^1 est par conséquent une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6.

Compte-tenu du choix du repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$, les orientations singulières des roues directrices 1 et 2 au sens de l'Hypothèse 2.6, sont

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ } [\pi] \quad (2.33)$$

□

Preuve : Il a été supposé dans la Proposition 2.16 que les roues directrices orientées indépendamment étaient les roues 1 et 2.

Pour tout robot de la classe \mathcal{R}_2^1 , il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ comme indiqué à la Proposition 2.16. Grâce à ce choix, les angles α_1 et α_2 sont respectivement égaux à 0 et π , et l_1 et l_2 sont égaux (on notera $l_1 = l_2 = L$) (cf. définition de α et l donnée page 15). Les 2 premières lignes de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$ présentent alors une expression très simple

$$A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*}) = \begin{pmatrix} -\cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & L \sin \beta_1 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & L \sin \beta_2 \end{pmatrix}$$

Le noyau de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$ basé sur ces 2 lignes s'obtient en calculant leur produit vectoriel

$$S(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} -\cos \beta_1 \\ -\sin \beta_1 \\ L \sin \beta_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ L \sin \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ L \sin(\beta_1 + \beta_2) \\ \sin(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

En reportant (2.34) dans le Théorème 2.3, nous obtenons bien le modèle cinématique réduit 2.32. ◁

On note que, comme cela avait été annoncé à la section 2.3.2.a, S ne dépend que de β_{1,\dots,β_n} , c'est-à-dire dans notre cas, uniquement de β_1 et β_2 .

Proposition 2.17 Description des degrés de liberté d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

Le modèle (2.32) d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 met en évidence 3 degrés de liberté : η_m, η_{o_1} et η_{o_2} . Ceux-ci ont la signification suivante

η_{o_1} est la vitesse d'orientation de la roue directrice 1,

η_{o_2} est la vitesse d'orientation de la roue directrice 2,

η_m est relié à la vitesse linéaire des roues directrices 1 ou 2 par les relations

$$\|\eta_m\| = \frac{\|\vec{V}_{S_1}\|}{2L|\sin \beta_2|} = \frac{\|\vec{V}_{S_2}\|}{2L|\sin \beta_1|} \quad (2.35) \quad \square$$

Preuve : La signification de η_{o_1} et η_{o_2} est immédiate au vu du modèle (2.32). Celle de η_m peut être mise en évidence comme suit : \vec{V}_{S_1} , vitesse linéaire du centre de la roue 1 et \vec{V}_P , vitesse linéaire au point P , \vec{V}_P , sont reliées par (Théorème 2.1)

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_P + \vec{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{P S_1}$$

soit encore, en développant cette relation selon la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{V}_{S_1} = R(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

En reportant (2.32) dans (2.36), on obtient finalement

$$\vec{V}_{S_1} = \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ 2L \cos \beta_1 \sin \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

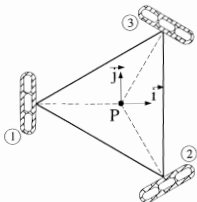
De la même façon, on montrerait que

$$\vec{V}_{S_2} = \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ 2L \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

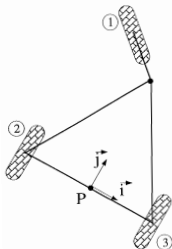
Les relations (2.37) et (2.38), et (2.33) conduisent bien à la relation désirée (2.35). \triangleleft

La description des 4 autres classes est donnée en annexe, section D.2. Les résultats de cette étude sont présentés de façon synoptique sur le Tableau 2.1, page 45. Enfin, les Figures 2.8 à 2.12 proposent un exemple de robot pour chacune des classes. Le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ que nous avons choisi y est à chaque fois représenté.

de	Description des roues fixes et directrices	Choix du repère	Modèle cinématique réduit	Degrés de liberté
3	0 roue fixe 0 roue directrice	$[P, \vec{i}, \vec{j}]$ arbitraire	$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \\ \eta_{m_3} \end{pmatrix}$	η_{m_1} vit. lin. selon \vec{i} η_{m_2} vit. lin. selon \vec{j} η_{m_3} vit. de rot.
2	1 roue fixe ou $n^{di} > 1$ roues fixes ayant même axe 0 roue directrice	P : point de l'axe des roues fixes, (\vec{i}, \vec{j}) : \vec{i} dirigé selon l'axe de la roue fixe $\Rightarrow \beta = 0$ pour la (les) roue fixe	$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \end{pmatrix}$	η_{m_1} vit. lin. η_{m_2} vit. de rot.
2	0 roue fixe 1 roue directrice	P : centre de la roue directrice, (\vec{i}, \vec{j}) arbitraire	$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \beta & 0 \\ \cos \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \end{pmatrix}$ $\dot{\beta} = \eta_o$	η_{m_1} vit. lin. η_{m_2} vit. de rot. η_o vit. d'orien.
1	1 roue fixe ou $n^{fi} > 1$ roues fixes ayant même axe 1 roue directrice ou $n^{di} > 1$ roues directrices coordonnées	P proj. \perp du centre S_1 sur l'axe de la roue fixe, (\vec{i}, \vec{j}) \vec{i} dirigé selon l'axe de la roue fixe $\Rightarrow \beta = 0$ pour la (les) roue fixe, $L = \ \vec{S_1 P}\ $	$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ L \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \eta_m$ $\dot{\beta} = \eta_o$	η_m relié à vit. lin. de la roue 1 η_o vit. d'orien. de la roue 1
1	0 roue fixe 2 roues directrices ou $n^{di} > 2$ roues directrices coordonnées	P point à mi-distance des roues directrices 1 & 2, (\vec{i}, \vec{j}) \vec{i} dirigé selon $\vec{S_2 S_1}$ $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ [°], $L = 0.5. \ \vec{S_1 S_2}\ $	$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ L \sin(\beta_1 + \beta_2) \\ \sin(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix} \eta_m$ $\dot{\beta}_1 = \eta_{o1}$ $\dot{\beta}_2 = \eta_{o2}$ singularité : $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ [°]	η_m relié à vit. lin. des roues 1 & 2 η_{o1} vit. d'orien. 1 η_{o2} vit. d'orien. 2

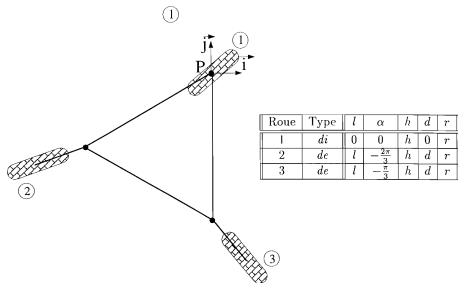
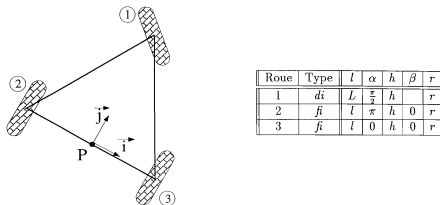


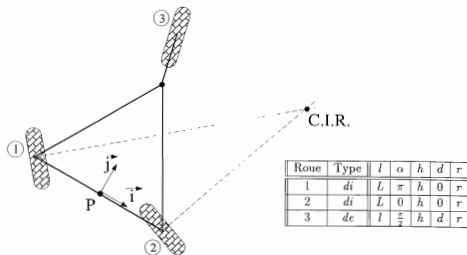
Roue	Type	l	α	h	β	γ	r
1	<i>om</i>	l	π	h	0	0	r
2	<i>om</i>	l	$-\frac{\pi}{3}$	h	0	0	r
3	<i>om</i>	l	$\frac{\pi}{3}$	h	0	0	r

Figure 2.8: Exemple de robot \mathcal{R}_0^3


Roue	Type	l	α	h	β	d	r
1	<i>de</i>	l	$\frac{\pi}{2}$	h		d	r
2	<i>f</i>	L	π	h	0	0	r
3	<i>f</i>	L	0	h	0	0	r

Figure 2.9: Exemple de robot \mathcal{R}_0^2

Figure 2.10: Exemple de robot \mathcal{R}_1^2 Figure 2.11: Exemple de robot \mathcal{R}_1^1

Figure 2.12: Exemple de robot \mathcal{R}_2^1

2.3.3 Modèle dynamique

Le modèle cinématique d'un robot mobile, présenté à la section 2.3.2, précise les possibilités d'évolution de toutes les coordonnées généralisées de ce système (Théorème 2.2). Il fait apparaître, suivant la classe à laquelle appartient le robot, 2 ou 3 degrés de liberté, correspondant à la vitesse linéaire du châssis (degrés de liberté η_m) et à la vitesse d'orientation des roues directrices si le robot en comporte (degrés de liberté η_o) (Propositions 2.17, D.3, D.6, D.9 et D.12, voir aussi Tableau 2.1).

Si l'inertie du robot est faible et si ses moteurs ont un temps de réponse très court, ces différentes vitesses du robot peuvent être considérées comme étant les variables spécifiées par l'utilisateur pour commander le système. Dans ce cas, le modèle cinématique donné par le Théorème 2.2 décrit complètement le comportement du robot mobile. C'est une représentation d'état, avec q comme vecteur d'état et $(\eta_m, \eta_o)^T$ comme vecteur de commande. Il faut juste alors préciser les relations entre $(\eta_m, \eta_o)^T$ et les vitesses de rotation et d'orientation des différentes roues motorisées (à l'aide des 5 propositions mentionnées à la fin du premier paragraphe et du Théorème 2.1).

Cependant, dans la plupart des applications pratiques, il est beaucoup plus réaliste de considérer comme variables de commande, non pas les vitesses des roues, mais les couples de rotation et d'orientation qui leur sont appliqués. La modélisation présentée à la section 2.3.2, basée uniquement sur les vitesses des différentes roues, ne permet pas de mettre en évidence l'action de ces couples sur le comportement général du système. Il faut donc se tourner vers des méthodes plus classiques de modélisation des systèmes mécaniques. Dans cette section, nous détaillons la construction du modèle d'un robot mobile quelconque, sur la base des équations d'Euler-Lagrange. Le modèle obtenu, qui fait donc intervenir les couples appliqués sur le robot, est appelé modèle dynamique. Son expression est donnée

au Théorème 2.8. Nous montrons pour finir, Théorème 2.9, que lorsque les paramètres inertiels du robot sont connus (Hypothèse 2.7), ce modèle dynamique peut, grâce à un premier retour d'état, être ré-écrit comme le modèle cinématique complété par une série d'intégrateurs. Ce résultat est particulièrement important dans l'optique de la commande des robots mobiles, car il existe des techniques permettant, à partir d'une loi de commande calculée pour un système donné, de commander ce système étendu par des intégrateurs (voir [PAC91] ou la section 4.2.2.c pour un exemple). Le Théorème 2.9 montre donc que, sous l'hypothèse que les paramètres inertiels du robot sont connus, la synthèse des lois de commande peut être conduite simplement à partir du modèle cinématique. Les résultats décrits dans cette section, ont été présentés initialement dans [ABC91].

2.3.3.a Equations d'Euler-Lagrange pour un robot mobile à roues

Les équations d'Euler-Lagrange constituent l'une des techniques les plus classiques pour construire le modèle d'un système mécanique. La Définition 2.9 et le Théorème 2.7 rappellent l'expression de ces équations. Nous les particularisons ensuite, relation 2.45, au cas des robots mobiles.

Définition 2.9 Lagrangien d'un système mécanique

Soit un système mécanique, dont la position est repérée sans ambiguïté par le vecteur de coordonnées généralisées q . Soit $T(\dot{q}, q)$ l'énergie cinétique de ce système et $W(q)$ son énergie potentielle. On appelle alors Lagrangien de ce système, le scalaire noté $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$, défini par

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = T(\dot{q}, q) - W(q) \quad \square$$

Théorème 2.7 Equations d'Euler-Lagrange

Soit un système mécanique, repéré par un vecteur de coordonnées généralisées q , soit $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ son Lagrangien, et soit enfin τ , le vecteur de même dimension que q , correspondant à la somme des forces extérieures généralisées agissant sur ce système mécanique.

Le vecteur q , lors de tous les déplacements de ce système, satisfait au système d'équations suivantes, dites équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}, q)}{\partial q} = \tau \quad \square$$

Nous particularisons maintenant les équations d'Euler-Lagrange au cas des robots mobiles à roues satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2. Nous donnons d'abord l'expression du Lagrangien $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ de ces systèmes, puis nous décrivons le vecteur des forces extérieures généralisées τ

Lagrangien d'un robot mobile à roues

Puisque nous supposons que les robots mobiles sont rigides (Hypothèse 2.1.2) et qu'ils se déplacent sur un sol horizontal (Hypothèse 2.1.4), ces systèmes ne sont soumis à aucun effort élastique ou de pesanteur. Par conséquent, leur énergie potentielle est nulle

$$W(q) = 0$$

Leur Lagrangien (Définition 2.9) est donc constitué par la seule énergie cinétique $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$. Par définition

$$\mathcal{T}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \iiint_{\text{robot}} v^T(x, y, z) v(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

avec

(x, y, z) un système de coordonnées orthonormées sur le robot,

$\rho(x, y, z)$ densité de masse au point de coordonnées (x, y, z) , i.e.

$$\text{Masse totale du robot} = \iiint_{\text{robot}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$v(x, y, z)$ vitesse linéaire du robot au point de coordonnées (x, y, z) .

Le calcul de $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$ est un calcul classique de mécanique. On montre, voir [ABC91], que $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$ s'écrit

$$\mathcal{T}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.39)$$

avec $M(q)$ la matrice positive définie symétrique suivante :

$$M(q) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \xleftrightarrow{3} & \xleftrightarrow{n^{de}} & \xleftrightarrow{n} \\ 3 \uparrow & R^T(\theta) M_{11}(\beta_i) R(\theta) & R^T(\theta) M_{12} & 0 \\ n^{de} \uparrow & M_{12}^T R(\theta) & M_{22} & 0 \\ n \downarrow & 0 & 0 & M_{33} \end{array} \end{array} \quad (2.40)$$

Afin d'expliciter les sous-blocs de $M(q)$, nous introduisons les notations suivantes

m masse du châssis,

m_i masse de la roue i ,

(x_G, y_G) coordonnées du centre de masse du châssis dans le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$,

I moment d'inertie du châssis par rapport à un axe vertical passant par son centre de masse,

I_{α_i} moment d'inertie de la roue i par rapport à un axe vertical passant par Q_i ,

I_{r_i} moment d'inertie de la roue i par rapport à son axe de rotation.

Nous avons alors

- Matrice $M_{11}(\beta_i)^{(-1)}$

$$M_{11}[1, 1] = M_{11}[2, 2] = m + \sum_{i=1}^n m_i$$

⁽⁻¹⁾L'expression des matrices constituant $M(\beta_i)$ est légèrement différente de celle donnée dans [ABC91] car la définition de l'angle β_i associé à une roue désaxée n'est pas la même que celle utilisée dans ce mémoire.

$$\begin{aligned}
M_{11}[1, 2] &= M_{11}[2, 1] = 0 \\
M_{11}[1, 3] &= M_{11}[3, 1] = -mx_G - \sum_{i=1}^n m_i l_i \sin \alpha_i + \\
&\quad \sum_{i=n^{de}+1}^{n^{di}+n^{de}} m_i d_i \cos(\alpha_i + \beta_i) \\
M_{11}[2, 3] &= M_{11}[3, 2] = my_G + \sum_{i=1}^n m_i l_i \cos \alpha_i + \\
&\quad \sum_{i=n^{de}+1}^{n^{di}+n^{de}} m_i d_i \sin(\alpha_i + \beta_i) \\
M_{11}[3, 3] &= m(x_G^2 + y_G^2) + I + \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 + \\
&\quad \sum_{i=n^{de}+1}^{n^{di}+n^{de}} m_i (d_i^2 + 2d_i l_i \sin \beta_i)
\end{aligned}$$

- Matrice $M_{12}(\beta_i)$:

$$M_{12}(\beta_i) = \begin{pmatrix} \xleftrightarrow{n^{de}} \\ m_i d_i \cos(\alpha_i + \beta_i) \\ m_i d_i \sin(\alpha_i + \beta_i) \\ m_i d_i^2 + m_i d_i l_i \sin \beta_i + I_{o_i} \end{pmatrix} \quad i \in [n^{di}, n^{di}+n^{de}]$$

- Matrice M_{22} :

$$M_{22} = \text{diag}(m_i d_i^2 + I_{o_i}) \quad i \in [n^{di}, n^{di}+n^{de}]$$

- Matrice M_{33}

$$M_{33} = \text{diag}(I_{r_i}) \quad i \in [1, n]$$

Forces extérieures généralisées appliquées à un robot mobile

Dans le cas des robots mobiles, le vecteur des forces généralisées extérieures τ peut être décomposé en 2 vecteurs τ_1 et τ_2 :

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

comme suit

τ_1 : forces généralisées créées par les différents actionneurs, pour assurer la rotation et/ou l'orientation des roues. Ces forces sont données par

$$\tau_1 = B u \quad (2.41)$$

avec

u : vecteur de dimension n_u , regroupant l'ensemble des couples de rotation et d'orientation engendrés par les actionneurs. Ce sont les variables que l'utilisateur du robot spécifie pour commander celui-ci

B : matrice $\dim(q) \times n_u$ constituée ainsi : dans chaque colonne, un élément est 1, tous les autres sont 0. La position de l'élément 1 est fonction du couple associé à cette colonne

si le $k^{\text{ième}}$ élément de u est le couple commandant la rotation de la roue i , alors dans la $k^{\text{ième}}$ colonne de B , l'élément 1 se trouve en position $3 + n^{di} + n^{de} + i$, c'est-à-dire à la place occupée par la variable φ_i dans le vecteur q (cf. Proposition 2.7)

si le $k^{\text{ième}}$ élément de u est le couple commandant l'orientation de la roue i , alors dans la $k^{\text{ième}}$ colonne de B , l'élément 1 se trouve en position $3 + i$, c'est-à-dire à la place occupée par la variable β_i dans le vecteur q (cf. Proposition 2.7)

τ_2 forces de contact roues-sol.

Sous l'hypothèse de roulement pur sans glissement (Hypothèse 2.2), la vitesse du point de contact de chacune des roues avec le sol est nulle. L'ensemble des forces constituant τ_2 ont donc une puissance nulle. Par conséquent

$$\tau_2^T \dot{q} = 0 \quad (2.42)$$

En rapprochant (2.42) de la Proposition 2.12, on en déduit qu'il existe un vecteur λ tel que .

$$\tau_2 = A^T(q)\lambda \quad (2.43)$$

λ est appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Equations d'Euler-Lagrange pour un robot mobile à roues

Afin de simplifier l'expression des équations d'Euler-Lagrange, introduisons encore la notation suivante :

$$C(\dot{q}, q) \triangleq \frac{dM(q)}{dt} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \quad (2.44)$$

Alors, en reportant (2.39), (2.41), (2.43) et (2.44) dans le Théorème 2.7, nous obtenons facilement que les équations d'Euler-Lagrange, associées à un robot mobile satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2, s'écrivent .

$$M(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} = A^T(q)\lambda + B(q)u \quad (2.45)$$

2.3.3.b Représentation d'état

En Automatique, l'étude et la commande d'un système est généralement conduite à partir d'une représentation d'état de ce dernier. Nous montrons dans cette section que les équations d'Euler-Lagrange (2.45) peuvent facilement être ré-écrites sous une telle forme. La représentation d'état ainsi obtenue est dite modèle dynamique des robots mobiles à roues (Théorème 2.8 ci-dessous).

Nous avons besoin d'introduire les 2 notations suivantes

soit $\hat{S}(q)$ la matrice définie par

$$\hat{S}(q) = \begin{pmatrix} R^{-1}(\theta)S(\beta_{1,\dots,n^{\text{de}}}) & 0 \\ 0 & Id \\ 0 & N(\beta_{1,\dots,n^{\text{de}}}) \\ -A_{23}^{-1}A_{21}(\beta_i)S(\beta_{1,\dots,n^{\text{de}}}) & 0 \\ -A_{14}^{-1}A_{11}(\beta_i)S(\beta_{1,\dots,n^{\text{de}}}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow 3 \\ \uparrow \delta_o \\ \uparrow n^{\text{de}} - \delta_o \\ \uparrow n^{\text{de}} \\ \uparrow n \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

soit η le vecteur regroupant l'ensemble des degrés de liberté du modèle cinématique du robot :

$$\eta = (\eta_{m_1}, \dots, \eta_{m_{s_m}}, \eta_{o_1}, \dots, \eta_{o_{s_o}})^T \quad (2.47)$$

Le modèle cinématique d'un robot mobile, décrit au Théorème 2.2, s'écrit alors de manière compacte comme :

$$\dot{q} = \tilde{S}(q)\eta \quad (2.48)$$

En reportant (2.48) ainsi que sa dérivée dans les équations d'Euler-Lagrange (2.45), nous obtenons un premier système d'équations, décrivant le comportement d'un robot mobile, et ne comportant plus que des dérivées d'ordre un

$$\begin{cases} M(q)\tilde{S}(q)\dot{\eta} + M(q)\frac{d\tilde{S}(q)}{dt}\eta + C(\tilde{S}(q)\eta, q)\tilde{S}(q)\eta = A^T(q)\lambda + Bu \\ \dot{q} = \tilde{S}(q)\eta \end{cases} \quad (2.49)$$

La matrice $\tilde{S}(q)$ définie par (2.46) étant par construction le noyau de $A(q)$ (cf. Proposition 2.12 et relation (2.20)), pré-multiplier la première ligne de ce système par $\tilde{S}^T(q)$ permet d'éliminer les multiplicateurs de Lagrange

$$\begin{cases} \tilde{S}^T(q)M(q)\tilde{S}(q)\dot{\eta} + \tilde{S}^T(q)M(q)\frac{d\tilde{S}(q)}{dt}\eta + \tilde{S}^T(q)C(\tilde{S}(q)\eta, q)\tilde{S}(q)\eta = \tilde{S}^T(q)Bu \\ \dot{q} = \tilde{S}(q)\eta \end{cases} \quad (2.50)$$

Le système (2.50) ainsi obtenu est alors clairement une représentation d'état pour le robot mobile : en effet, puisque $M(q)$ est positive définie symétrique, $\tilde{S}^T(q)M(q)\tilde{S}(q)$ est inversible. La première ligne de (2.50) permet donc d'exprimer $\dot{\eta}$ en fonction de η , q et u .

Théorème 2.8 Modèle dynamique d'un robot mobile quelconque

Le modèle dynamique d'un robot mobile quelconque, satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2 est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (\tilde{S}^T(q)M(q)\tilde{S}(q))^{-1}\tilde{S}^T(q)[-M(q)\frac{d\tilde{S}(q)}{dt}\eta - C(\tilde{S}(q)\eta, q)\tilde{S}(q)\eta + Bu] \\ \dot{q} = \tilde{S}(q)\eta \end{cases} \quad (2.51)$$

avec :

- q : vecteur de coordonnées généralisées (Proposition 2.7),
- η : vecteur des degrés de liberté cinématique (relation (2.47)),
- u : vecteur regroupant l'ensemble des couples de rotation et d'orientation engendrés par les actionneurs,
- $\tilde{S}(q)$, $M(q)$, $C(\tilde{S}(q)\eta, q)$ et B : matrices dont l'expression est donnée respectivement par (2.46), (2.40), (2.44) et à la page (2.3.3.a) \square

Preuve : La preuve du Théorème 2.8 est immédiate au vu de (2.50). \triangleleft

On note que le modèle cinématique (2.48) apparaît comme l'un des constituants du modèle dynamique.

2.3.3.c Représentation d'état lorsque les paramètres inertiels sont connus

Nous nous plaçons maintenant dans l'optique d'une utilisation du modèle dynamique construit ci-dessus pour le calcul d'une loi de commande. Ce modèle comporte plusieurs termes inertiels (matrices $M(q)$ et $C(\dot{S}\eta, q)$). Au moment de la synthèse d'une loi de commande, il faut que l'utilisateur ait une idée relativement précise de la valeur de ces termes. Il paraît en effet difficile de construire une loi de commande pertinente pour un robot mobile sans connaître par exemple un ordre de grandeur de la masse de ce dernier. Nous montrons dans cette section que si cette connaissance est parfaite, alors, grâce à un premier retour d'état, un modèle dynamique très simple, ne comportant aucun terme inertiel, peut être proposé pour décrire et commander un robot mobile.

Plus précisément, nous introduisons les 2 hypothèses suivantes

Hypothèse 2.7 Les paramètres inertiels des robots mobiles sont connus

La valeur de tous les paramètres inertiels apparaissant dans les matrices $M(q)$ (relation (2.40)) et $C(\dot{S}\eta, q)$ (relation 2.44) est connue. \square

Hypothèse 2.8 Les robots mobiles sont complètement actionnés

Des moteurs commandant la rotation et/ou l'orientation des roues ont été placés sur le robot mobile de façon que la matrice $S^T(q)B$ soit de rang maximum, c'est-à-dire de rang $\dim(\eta)$ \square

L'Hypothèse 2.8 signifie simplement (voir première ligne du modèle dynamique (2.51) que les moteurs commandant la rotation et/ou l'orientation de certaines roues du robot ont été placés de telle sorte qu'en spécifiant l'ensemble des couples u , l'utilisateur peut donner à $\dot{\eta}$ n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^{\dim(\eta)}$. Dit autrement, il est supposé que les moteurs permettent d'exploiter toutes les possibilités d'évolution du robot mobile. Cette hypothèse apparaît très naturelle : les robots mobiles sont des systèmes complexes à commander, les sous-actionner ne ferait que compliquer cette tâche, voire la rendre impossible (les robots mobiles complètement actionnés sont tous commandables, Théorème B.8, les robots mobiles sous-actionnés ne le sont pas nécessairement). Le choix des roues à motoriser dépend du robot considéré. Dans [CBA93, section 6.2], une motorisation minimale, satisfaisant l'Hypothèse 2.8, est présentée pour 6 exemples de robots mobiles. On peut également envisager, pour des raisons de sécurité, de sur-actionner un robot, de façon que si l'un des moteurs tombe en panne, le robot reste exploitable.

L'Hypothèse 2.7 est bien sûr beaucoup plus discutable : dans la pratique, l'utilisateur ne dispose en effet que d'une approximation plus ou moins pointue des paramètres inertiels du robot. Cette hypothèse a cependant été retenue car elle simplifie significativement le modèle dynamique des robots, et donc permet de mettre en œuvre de nombreuses techniques de commande. Il conviendrait juste, dans un second temps, de s'assurer que les lois obtenues grâce à cette hypothèse sont robustes vis à vis des erreurs sur les paramètres inertiels, et si elles ne le sont pas de manière satisfaisante, proposer des techniques permettant de les rendre plus robustes. Ce point n'est pas traité dans ce mémoire. Une

solution possible au problème de la robustesse pourrait être l'utilisation de lois adaptatives : dans [Bou92], l'auteur a montré que les lois adaptatives de Slotine et Li ([SL88]), basées sur une approche Lyapunov, ainsi que les lois adaptatives de Middleton et Goodwin ([MG88]), basées sur une approche linéarisation, pouvaient être adaptées avec succès au cas d'un système non-holonyme particulier : un pont-roulant. D'autres approches devraient également apporter des réponses à ce problème de robustesse paramétrique, par exemple les approches dites Lyapunov redesign, voir [Kha92, section 5.5], [EK92], bien adaptées aux commandes par linéarisation. Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés uniquement sur les problèmes de robustesse par rapport à la présence d'un glissement des roues sur le sol. Cette étude est proposée au Chapitre 5.

Théorème 2.9 Modèle dynamique d'un robot mobile quelconque, lorsque les paramètres inertiels sont connus

Sous les Hypothèses (2.7) et (2.8), le modèle dynamique d'un robot mobile quelconque, satisfaisant les Hypothèses 2.1 et 2.2, peut être exprimé comme :

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= v \\ \dot{q} &= \dot{S}(q)\eta \end{cases} \quad (2.52)$$

où v est un vecteur de commande, de même dimension que u , introduit par le retour d'état

$$u = (\dot{S}^T(q)B)^{\dagger} \left[\dot{S}^T(q)M(q)\dot{S}(q)v + \dot{S}^T(q) \left(M(q)\frac{d\dot{S}(q)}{dt}\eta + C(\dot{S}(q)\eta, q)\dot{S}(q)\eta \right) \right] \quad (2.53)$$

Preuve : On vérifie facilement que la loi de commande (2.53) proposée dans le Théorème 2.9 peut effectivement être appliquée à un robot mobile. En effet, d'une part, la matrice pseudo-inverse de $(\dot{S}^T(q)B)$, notée $(\dot{S}^T(q)B)^{\dagger}$, est parfaitement définie, puisque $(\dot{S}^T(q)B)$ est de rang plein (Hypothèse 2.8), et d'autre part, on peut effectivement calculer les matrices $M(q)$ et $C(\dot{S}(q)\eta, q)$, puisque les paramètres inertiels du robot sont supposés connus (Hypothèse 2.7). En reportant cette loi de commande dans l'expression du modèle dynamique du robot proposé au Théorème 2.8, on obtient immédiatement le modèle dynamique présenté au Théorème 2.9. \triangleleft

L'ensemble des composantes du vecteur des coordonnées généralisées q sont nécessaires pour décrire sans ambiguïté la configuration d'un robot mobile. Cependant, parmi ces variables, généralement seul le vecteur ξ , repérant la position et l'orientation du châssis, présente un intérêt pour l'utilisateur. Dans le cas des modèles cinématiques, section 2.3.2, nous avons prouvé que l'évolution de ξ pouvait être étudiée uniquement sur la base d'un modèle cinématique réduit (Théorème 2.3). Puisque le modèle cinématique apparaît comme l'un des constituants du modèle dynamique, ce résultat s'étend également à ces derniers

Théorème 2.10 Modèle dynamique réduit d'un robot mobile quelconque

Sous les Hypothèses (2.7) et (2.8), le modèle dynamique d'un robot mobile quelconque, réduit aux seules variables utiles du point de vue de la commande, est donné par

$$\begin{cases} \dot{\eta} = v \\ \dot{\xi} = R^{-1}(\theta)S(\beta_{1,\dots,\delta_n})\eta_m \\ \dot{\beta}_{1,\dots,\delta_n} = \eta_o \end{cases} \quad (2.54) \quad \square$$

Preuve : La preuve du Théorème 2.10 est immédiate au vu des Théorèmes 2.9 et 2.3.4

La classification des modèles cinématiques réduits de l'ensemble des robots mobiles à roues proposée à la section 2.3.2.b peut alors clairement être étendue aux modèles dynamiques réduits

Théorème 2.11 Les modèles dynamiques réduits de tous les robots mobiles forment 5 classes d'équivalence

Sous les Hypothèses 2.1, 2.2, 2.7 et 2.8, les modèles dynamiques réduits de l'ensemble des robots mobiles à roues forment 5 classes d'équivalence, caractérisées chacune par une valeur du couple (δ_m, δ_o) . \square

Preuve : La preuve du Théorème 2.11 est immédiate au vu des Théorèmes 2.10 et 2.6. \triangleleft

2.4 Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices

Nous proposons dans cette section un second modèle cinématique réduit pour les robots mobiles de la classe \mathcal{R}_2^1 , c'est-à-dire, Proposition 2.15, pour les robots mobiles comportant $n^{di} \geq 2$ roues directrices et aucune roue fixe.

La méthode générale de modélisation d'un robot mobile, présentée à la section 2.3.2, conduit pour cette classe de robots, et cette classe seulement, à un modèle incluant des singularités (Proposition 2.16). Lorsque le robot considéré ne comporte que 2 roues directrices, ou que les centres S_i de toutes les roues directrices sont alignés, ces singularités sont inévitables. Elles correspondent, voir la discussion précédant l'Hypothèse 2.5, à une rupture dans les possibilités d'évolution de ces robots. Par contre, lorsque le robot considéré est équipé d'au moins 3 roues et que leurs centres S_i ne sont pas alignés, les singularités apparaissant dans le modèle donné par la Proposition 2.16 n'ont aucune signification physique. Une illustration manifeste étant que toute orientation singulière des roues directrices, obtenue lorsque l'utilisateur oriente indépendamment les roues 1 et 2, devient une orientation admissible si l'utilisateur oriente indépendamment les roues 2 et 3 ou 1 et 3. Ce sont d'autres orientations singulières qui sont alors créées. Ces singularités sont donc bien liées uniquement à la modélisation proposée.

Dans cette section, nous proposons pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 une seconde technique de modélisation, purement géométrique puisqu'elle est basée uniquement sur la notion de centre instantané de rotation (CIR). Le modèle obtenu pour les robots équipés

d'au moins 3 roues et dont les centres ne sont pas alignés présente également des singularités de modélisation. Mais à la différence du modèle donné à la Proposition 2.16, ces singularités ne sont pas complètement artificielles : elles correspondent à des orientations des roues directrices qui certes permettraient au robot de bouger, mais que d'un point de vue purement pratique il est préférable d'éviter, car elles peuvent conduire à une saturation des actionneurs. S'imposer de ne pas amener les orientations des roues directrices sur ces singularités n'est donc pas une restriction des possibilités d'évolution du robot, comme peut l'être l'Hypothèse 2.6, mais une nécessité technique.

Plus précisément, nous mettons en évidence à la section 2.4.1 que, pour tous les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , le passage par certaines orientations des roues directrices peut amener à saturation les moteurs commandant l'orientation de celles-ci. Le reste de cette section est consacrée à la construction du modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 dont les seules singularités sont ces orientations des roues directrices à éviter d'un point de vue pratique. À la section 2.4.2, nous proposons un jeu de variables repérant toutes les orientations des roues directrices permettant au robot de bouger, exception faite des orientations singulières. Puis, à la section 2.4.3, nous combinons ces résultats pour construire le modèle cinématique recherché. Cette modélisation a été proposée initialement dans [MAT92] puis développée dans [TAM95b] ainsi que dans les 2 rapports [TAM92c] et [TAM93].

2.4.1 Orientations des roues directrices pouvant conduire à une saturation des actionneurs

Nous montrons le résultat suivant.

Proposition 2.18 Orientations des roues directrices à éviter pour des motifs techniques

Pour tous les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 excepté ceux ne comportant que 2 roues directrices, les orientations des roues directrices correspondant à un CIR confondu avec le centre d'une des roues directrices peuvent conduire à une saturation des actionneurs commandant l'orientation de ces roues. Aussi, bien que ces orientations des roues directrices permettent au robot de bouger, il est préférable, pour des raisons purement techniques, de les éviter.
□

Preuve : Nous considérons tout d'abord le cas d'un robot équipé de $n^{di} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés. Nous envisageons successivement les 3 orientations suivantes des roues directrices : les n^{di} roues sont parallèles, puis les n^{di} droites Δ_i sont concourantes en un point quelconque, enfin les n^{di} droites Δ_i sont concourantes en S_1 , centre de l'une des roues directrices. Nous verrons que seule la dernière orientation des roues directrices peut conduire à une saturation des actionneurs commandant l'orientation des roues. Le cas des autres robots constituant la classe \mathcal{R}_2^1 , c'est-à-dire les robots équipés de 2 roues directrices ou de $n^{di} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés, est étudié ensuite.

Considérons donc un robot équipé de $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés.

Supposons tout d'abord que les n^d roues directrices sont parallèles, Figure 2.13-*gauche*. Si nous modifions légèrement l'orientation de 2 quelconques de ces roues, 2 cas de figure sont possibles : soit ces 2 roues restent parallèles, soit leurs droites Δ_i deviennent sécantes. Envisageons d'abord la seconde possibilité. De manière à ne pas bloquer le robot, l'orientation des $n^d - 2$ autres roues directrices doit être également modifiée afin que toutes les droites Δ_i soient concourantes, définissant ainsi un CIR (Proposition 2.13). On constate facilement sur un croquis que la ré-orientation demandée aux $n^d - 2$ roues directrices est également minime. La Figure 2.13 en propose une illustration sur l'exemple d'un robot équipé de 3 roues directrices. La conclusion est la même lorsque les 2 roues directrices restent parallèles.

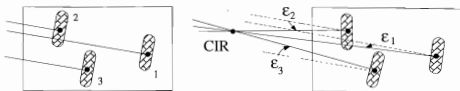


Figure 2.13: Evolution de l'orientation de 3 roues directrices depuis une configuration où celles-ci sont toutes parallèles

→ Lorsque les roues directrices sont initialement toutes parallèles, une légère ré-orientation de 2 d'entre elles n'impose qu'une légère ré-orientation des $n^d - 2$ autres roues directrices. Les actionneurs commandant l'orientation de ces roues ne seront donc pas amenés à saturation.

Considérons maintenant le cas où les n^d roues directrices présentent des droites Δ_i concourantes en un point quelconque, Figure 2.14-*gauche*. Si l'on modifie légèrement l'orientation de 2 quelconques de ces roues, les 2 mêmes cas de figure que précédemment peuvent se produire. Nous envisageons encore une fois le cas où les 2 droites Δ_i associées à ces roues restent sécantes. Afin de ne pas bloquer le robot, l'orientation des $n^d - 2$ autres roues directrices doit être modifiée de sorte que toutes les droites Δ_i soient concourantes, définissant ainsi un CIR (Proposition 2.13). Un croquis montre encore une fois que la ré-orientation demandée aux $n^d - 2$ roues directrices est également minime. La Figure 2.14 en propose une illustration sur l'exemple d'un robot équipé de 3 roues directrices. La conclusion est la même lorsque les 2 roues directrices restent parallèles.

→ Lorsque les roues directrices présentent des droites Δ_i concourantes en un point quelconque, une légère ré-orientation de 2 d'entre elles n'impose qu'une légère ré-orientation des $n^d - 2$ autres roues directrices. Les actionneurs commandant l'orientation de ces roues ne seront donc pas amenés à saturation.

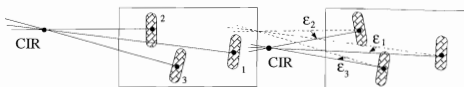


Figure 2.14: Evolution de l'orientation de 3 roues directrices depuis une configuration où le CIR est quelconque

Considérons enfin le cas où les n^d roues directrices présentent des droites Δ , concourantes en S_i . La Figure 2.15-(2) présente une telle situation. Celle-ci peut découler par exemple d'une légère ré-orientation des roues 2 et 3 depuis la configuration décrite à la Figure 2.15-(1). Si les roues 2 et 3 sont alors ré-orientées légèrement comme indiqué sur la Figure 2.15-(3), la roue 1 doit tourner instantanément de 90° afin que les 3 droites Δ , puisse être concourantes. Cela est techniquement irréalisable, l'actionneur de la roue 1 va être amené à saturation.

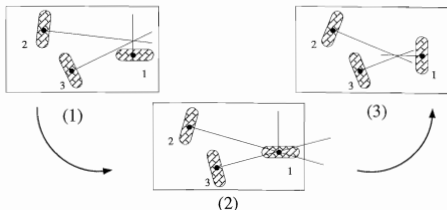


Figure 2.15: Evolution de l'orientation de 3 roues directrices depuis une configuration où le CIR est confondu avec le centre d'une de ces roues directrices

→ Lorsque les roues directrices présentent des droites Δ , concourantes en S_i (qui est alors le CIR du robot pour cette orientation des roues) une légère ré-orientation de 2 d'entre elles peut imposer une ré-orientation très rapide et de grande amplitude pour la roue directrice sur laquelle est le CIR. L'actionneur commandant l'orientation de cette roue peut donc être amené à saturation. Cela termine la preuve de la Proposition 2.18 pour les robots équipés de $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés.

Les mêmes arguments peuvent être développés pour les robots comportant $n^{di} \geq 3$ roues directrices, mais dont les centres S_i sont alignés. En effet, pour de tels robots, si le CIR est confondu par exemple avec S_1 , alors toutes les droites Δ_i doivent être superposées, sauf Δ_1 qui peut être quelconque (cf. Proposition 2.13). Si l'on modifie maintenant légèrement l'orientation des roues 2 et 3, il est clair que cela peut imposer à la roue 1 une ré-orientation de grande amplitude.

Enfin, pour les robots ne comportant que 2 roues directrices, il n'y a par contre, aucune difficulté technique. En effet, puisque les 2 roues sont orientées de manière indépendante, cela peut toujours être réalisé sans saturer les actionneurs. \triangleleft

Afin d'utiliser ce résultat dans la suite de ce mémoire, nous introduisons les notations suivantes :

Définition 2.10 Orientations des roues directrices permettant à un robot \mathcal{R}_2^1 de bouger

Nous noterons \mathcal{O} l'ensemble des orientations des roues directrices $\beta_{1,\dots,n^{di}}$ permettant à un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 de bouger.

L'ensemble \mathcal{O} peut être défini soit à partir de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{di}})$ par (voir relation (2.23)) :

$$\mathcal{O} = \{ \beta_{1,\dots,n^{di}} \mid \text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^{di}})) \leq 2 \} \quad (2.55)$$

soit de manière géométrique (voir Proposition 2.13)

\mathcal{O} est constitué par l'ensemble des valeurs de $\beta_{1,\dots,n^{di}}$ associées à l'une des 3 situations les roues directrices sont toutes parallèles, les droites Δ_i associées à ces roues sont concourantes, ou toutes superposées.

□

Définition 2.11 Orientations des roues directrices considérées comme singulières

Nous noterons \mathcal{O}_s , l'ensemble des orientations des roues directrices qui permettraient au robot de bouger, mais qu'il est préférable d'éviter, soit parce qu'elles peuvent conduire à la saturation des actionneurs, soit parce qu'elles correspondent à la singularité intrinsèque du robot. Au vu de l'Hypothèse 2.5 et de la Proposition 2.18, \mathcal{O}_s est le sous-ensemble de \mathcal{O} constitué par :

- les orientations des roues directrices correspondant à un CIR confondu avec le centre d'une des roues directrices,
- l'orientation des roues directrices pour laquelle toutes les droites Δ_i sont superposées (cette orientation des roues directrices n'existe que dans le cas des robots comportant 2 roues directrices ou $n^{di} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés). □

La seconde partie de la Définition 2.11 comporte en fait une légère inexactitude : en effet, dans le cas des robots ne comportant que $n^{di} = 2$ roues directrices, l'orientation des roues correspondant à un CIR sur S_1 ou S_2 ne conduit pas à la saturation des actionneurs

2.4. Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices61

orientant ces 2 roues (cf. preuve de la Proposition 2.18). Nous avons cependant intégré ces orientations à l'ensemble \mathcal{O}_s de façon à ce que le modèle cinématique que nous présentons à la section 2.4.3 s'écrive de manière identique pour tous les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 .

Enfin, par opposition à la Définition 2.11, nous introduisons maintenant

Définition 2.12 Orientations des roues directrices considérées comme non-singulières

Nous noterons \mathcal{O}_{ns} le sous-ensemble de \mathcal{O} défini par .

$$\mathcal{O}_{ns} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_s \quad \square$$

Un modèle cinématique réduit pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 dont les seules singularités seraient celles présentes dans \mathcal{O}_s constituerait un modèle très naturel pour ces systèmes : les seules singularités introduites par la modélisation seraient dans ce cas, les orientations des roues directrices dont il aurait de toute façon été nécessaire de se passer pour des raisons d'implémentation.

Le modèle proposé à la section précédente (Proposition 2.16) ne répond pas à cette attente. Pour ce modèle, les orientations singulières des roues directrices (relation (2.33)) correspondent géométriquement à la situation où les roues 1 et 2 sont orientées de telle façon que Δ_1 et Δ_2 sont superposées (Hypothèse 2.6). Au vu de la Proposition 2.13, tous les mouvements du robot pour lesquels le CIR se trouve sur la droite $(S_1 S_2)$ sont donc proscrits. Cette restriction est tout à fait artificielle.

d'une part, elle présente comme singuliers une infinité de mouvements ne présentant pourtant aucune difficulté en pratique (i.e. les rotations par rapport à un CIR placé sur $(S_1 S_2) \setminus \{S_1, S_2\}$. Ces mouvements, voir la preuve de la Proposition 2.18, ne proposent aucun problème)

d'autre part, elle considère comme admissibles des mouvements pouvant donner lieu à des saturations des actionneurs (i.e. les rotations par rapport à un CIR placé en $S_{i, i \in \{3, n, 4\}}$).

Dans la suite de cette section, nous construisons un second modèle cinématique réduit pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 dont les seules singularités correspondent bien à \mathcal{O}_s .

2.4.2 Paramétrisation des orientations non-singulières des roues directrices

Parmi les $n^d \geq 2$ roues directrices équipant un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 , seules 2 peuvent être orientées de manière indépendante (puisque $\delta_o = 2$). Aussi, la paramétrisation qui apparaît la plus naturelle pour décrire l'ensemble \mathcal{O} (Définition 2.10) est (β_1, β_2) , les orientations de 2 quelconques de ces roues directrices. C'est ce choix qui a été fait à la section 2.3.2.a pour construire le modèle cinématique réduit de ces robots (Théorème 2.3).

Cette paramétrisation ne décrit cependant pas \mathcal{O} dans sa totalité : à chaque valeur du couple (β_1, β_2) correspond en effet un unique élément de \mathcal{O} , sauf lorsque cette valeur

représente la situation où Δ_1 et Δ_2 sont superposées. Pour cette valeur particulière de (β_1, β_2) , une infinité d'éléments de \mathcal{O} peuvent être associés, précisément toutes les orientations des roues directrices qui placent le *CIR* sur la droite $(S_1 S_2)$ ou pour lesquelles toutes les roues sont parallèles à cette orientation des roues 1 et 2. Cette singularité dans la représentation de \mathcal{O} induit nécessairement une singularité du modèle bâti sur cette représentation puisque pour une valeur de (β_1, β_2) l'orientation des autres roues directrices n'est pas spécifiée, le mouvement instantané du robot n'est pas connu, on ignore par conséquent les valeurs possibles pour $\dot{\xi}$. Le modèle cinématique réduit donné à la Proposition 2.16 est, comme attendu, singulier lorsque Δ_1 et Δ_2 sont superposées.

Lorsque le robot ne comporte que 2 roues directrices ou $n^d \geq 3$ roues directrices mais dont les centres S_i sont alignés, cette singularité de paramétrisation est incontournable. Comme cela a été dit à la discussion précédant l'Hypothèse 2.5, elle correspond à une rupture dans les possibilités d'évolution du robot. Les robots pour lesquels $n^d \geq 3$ avec les centres S_i des roues directrices non alignés ne présentent pas une telle rupture, cependant, comme le montre la proposition suivante, il n'existe pas pour autant 2 paramètres permettant de décrire complètement \mathcal{O} .

Proposition 2.19 *\mathcal{O} ne peut pas être paramétré par un couple de 2 variables*

Dans le cas des robots équipés de $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, \mathcal{O} est une variété de dimension constante 2, ne pouvant pas être décrite dans sa totalité par une seule carte. \mathcal{O} ne peut donc pas être complètement paramétré par un couple de 2 variables. \square

Preuve : La preuve de la Proposition 2.19 est donnée en annexe, à la section E.1.1 dans le cas d'un robot équipé de $n^d = 3$ roues directrices dont les centres ne sont pas alignés. Comme cette preuve est basée sur des arguments topologiques, elle s'étend assurément au cas $n^d > 3$. \triangleleft

Notre objectif dans cette section est de construire un modèle cinématique réduit pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 dont les seules singularités soient \mathcal{O}_s (Définition 2.11). Il nous faut donc au préalable proposer une paramétrisation de \mathcal{O} dont les singularités, inévitables au vu de la Proposition 2.19, se limitent à cet ensemble. Dit autrement, nous recherchons une paramétrisation de \mathcal{O}_{ns} .

La solution que nous proposons, Proposition 2.20 ci-dessous, utilise la notion de centre instantané de rotation à l'infini que nous introduisons maintenant.

Une translation n'est, stricto sensu, associée à aucun *CIR*. Cependant, en utilisant des arguments de continuité, une translation peut être vue comme un cas limite de rotation, plus précisément comme une rotation autour d'un *CIR* qui serait situé à l'infini dans la direction donnée par les droites Δ_i associées à chacune des roues directrices. Ce *CIR* à l'infini est par construction unique pour une translation donnée, et inversement, à un *CIR* à l'infini, on ne peut associer qu'une unique translation.

Définition 2.13 Centre instantané de rotation à l'infini

A chaque translation, nous pouvons associer de manière bijective un centre instantané de

2.4. Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices⁶³

rotation, situé à l'infini, dans la direction donnée par les droites Δ_i , associées à chacune des roues directrices et des roues fixes. \square

Le Principe de Descartes (Théorème 2.4) peut alors se reformuler comme :

Théorème 2.12 *Principe de Descartes : énoncé général (2)*

A chaque instant, le mouvement d'un corps rigide est une rotation autour d'un point appelé centre instantané de rotation, pouvant éventuellement être situé à l'infini. \square

Nous montrons maintenant que la paramétrisation présentée ci-dessous, qui utilise la notion de centre instantané de rotation à l'infini, décrit sans ambiguïté toutes les orientations des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_{ns} :

Proposition 2.20 *Paramétrisation de \mathcal{O}_{ns}*

L'ensemble des orientations β_1, \dots, β_n des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_{ns} peuvent être repérées sans ambiguïté par le couple de variables

$$(\beta_1, \sigma)$$

avec

β_1 l'orientation de la roue directrice numérotée 1,

σ : la courbure algébrique instantanée du châssis, vue depuis S_1 , c'est-à-dire (voir aussi Figure 2.16) :

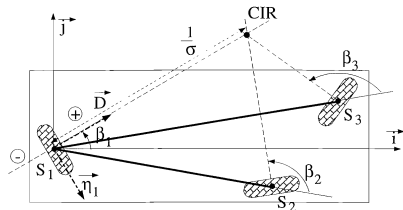
$$\begin{aligned} \sigma &= 0 && \text{lorsque le CIR est à l'infini} \\ \sigma &= \text{sign}(\vec{D} \cdot \overrightarrow{S_1 CIR}) \frac{1}{d(S_1 CIR)} && \text{sinon} \end{aligned}$$

où \vec{D} est le vecteur normal à la roue 1 $\vec{D} = (\cos(\alpha_1 + \beta_1), \sin(\alpha_1 + \beta_1))^T$ (\hookrightarrow 2), voir Figure 2.16 (α_1 y est égal à 0), et $d(S_1 CIR)$ est la distance entre S_1 et le CIR. La définition de σ est clairement non-singulière pour toute orientation des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_{ns} en effet, le dénominateur de σ n'est nul que lorsque le CIR est confondu avec S_1 , ce qui est exclu dans \mathcal{O}_{ns} , Définitions 2.11 et 2.12.

Au vu des définitions respectives de β_1 et σ , cet ensemble de 2 variables apparaît comme une sorte de coordonnées polaires du CIR. \square

Preuve : La preuve de la Proposition 2.20 comporte 2 étapes nous prouvons dans un premier temps que tout élément de \mathcal{O}_{ns} peut être repéré sans ambiguïté par la donnée du CIR, éventuellement à l'infini, associé à cet élément. Nous montrons ensuite que le couple

⁶³Le vecteur \vec{D} permet également de définir le signe de la vitesse linéaire de la roue 1, notée η_1 , utilisée à la section 2.4.3 pour représenter l'un des degrés de liberté cinématiques η_i est compté positivement si, lorsque l'on regarde la roue 1 par la face d'où sort \vec{D} , la roue 1 tourne dans le sens trigonométrique. Le vecteur $\vec{\eta}$ représenté sur la Figure 2.16 doit ainsi être compté positivement.

Figure 2.16: Paramétrisation (β_1, σ)

(β_1, σ) caractérise sans équivoque la position du *CIR* associé à toutes les orientations des roues directrices \mathcal{O}_{ns} . La Proposition 2.20 est alors établie.

Compte tenu de la Définition 2.13, la Proposition 2.13 assure qu'une orientation β_{1,\dots,n^d} des roues directrices est toujours associée à un unique *CIR*, excepté lorsque toutes les droites Δ_i sont superposées. Ces dernières orientations étant considérées comme singulières (Définition 2.11), tout élément de \mathcal{O}_{ns} est par conséquent associé à un unique *CIR*, situé éventuellement à l'infini. Nous montrons maintenant que cette association est bijective

pour tout élément de \mathcal{O}_{ns} associé à une translation, la définition d'un *CIR* à l'infini (Définition 2.13) assure que cette association est effectivement bijective,

- considérons maintenant un *CIR* placé à une distance finie. Une orientation β_{1,\dots,n^d} est associée à ce *CIR* si et seulement si pour chaque roue i , β_i est tel que le plan de la roue est perpendiculaire à la droite (S_i, CIR) (Proposition 2.13). Elle est donc unique si le *CIR* n'est pas confondu avec l'un des S_i , ce qui est le cas pour tous les $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$.

En conclusion, tout élément de \mathcal{O}_{ns} peut donc bien être repéré sans ambiguïté par la donnée du *CIR* auquel il est associé.

De multiples systèmes de coordonnées peuvent être choisis pour repérer la position du *CIR*, coordonnées cartésiennes, polaires, ... Compte tenu que nous souhaitons pouvoir représenter des positions qui sont à l'infini, nous avons retenu la paramétrisation par le couple (β_1, σ) , défini dans la Proposition 2.20. De façon évidente, chaque point du plan, excepté S_1 , peut être repéré par le couple (β_1, σ) . Chaque point est même repéré 2 fois par (α, σ) et $(\alpha + \pi, -\sigma)$.

2.4. Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices 65

Le fait que S_1 ne soit pas représenté par cette paramétrisation ne pose pas de difficulté, puisque le CIR associé à un élément de $\mathcal{O}_{n,n}$ n'est jamais situé en S_1 .

Le fait que cette représentation soit double n'est également pas un obstacle : les lois de commande que nous proposons au Chapitre 4 sont toutes C^∞ ce qui implique que l'évolution de toutes les variables, en particulier celle de β_1 et σ , est continue. Par conséquent, la donnée de $\beta_1(t=0)$ et $\sigma(t=0)$ lève immédiatement l'ambiguïté entre les 2 représentations possibles du CIR. Cette dualité aurait pu être facilement éliminée, en imposant par exemple à σ d'être positif. Un croquis, Figure 2.17, montre cependant qu'une telle "simplification" conduit à des difficultés lorsque le CIR est à l'infini : entre la Figure 2.17-(1) et la Figure 2.17-(2), la roue directrice 2 a été réorientée très légèrement. Sur la Figure 2.17-(1), l'orientation des roues directrices est repérée par le couple $(\beta_1, \sigma > 0)$. Si nous imposons à σ d'être positif, l'orientation des roues directrices sur la Figure 2.17-(2) doit alors être repérée par $(\beta_1 + \pi, \sigma > 0)$. Une ré-orientation infinitésimale d'une roue a conduit à une discontinuité dans la représentation de l'orientation des roues directrices. Cette discontinuité disparaît lorsque σ est autorisé à changer de signe : dans ce second cas, l'orientation des roues directrices sur la Figure 2.17-(1) peut être repérée par $(\beta_1, \sigma < 0)$. Dans la suite de ce mémoire, nous laisserons par conséquent à σ la possibilité de changer de signe, comme indiqué dans la Proposition 2.20. Cela termine la preuve de cette dernière. ◀

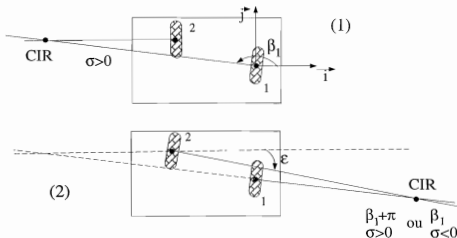


Figure 2.17: Illustration de la nécessité d'une représentation double du CIR

La paramétrisation de l'orientation des roues directrices donnée à la Proposition 2.20 est utilisée à la section 2.4.3 pour construire un modèle cinématique réduit pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 . Il sera montré que les singularités de ce modèle, comme espéré, se

limitent bien à l'ensemble \mathcal{O}_s (Théorème 2.13). Afin de pouvoir exploiter ce modèle pour synthétiser une loi de commande, comme cela est notre objectif, il faut toutefois vérifier que toutes ses variables d'état sont accessibles en temps réel à la mesure. Les 3 composantes du vecteur ξ , de même que l'ensemble du vecteur $\beta_{1,\dots,n^{\text{di}}}$ peuvent tous être mesurés directement (au moyen d'accéléromètres, de gyroscopes ou d'encodeurs). Nous montrons ci-dessous que σ , courbure algébrique instantanée du châssis, est alors elle-aussi accessible à la mesure.

Proposition 2.21 Expression de σ en fonction des $\beta_{1,\dots,n^{\text{di}}}$

De manière à utiliser des grandeurs de même dimension que σ , nous introduisons les constantes suivantes

$$\forall i \in \{2, \dots, n^{\text{di}}\} \quad \sigma_i = \frac{1}{l_i} \quad (2.56)$$

Le couple (α_i, σ_i) peut, comme le couple (α_i, l_i) , décrire la position sur le châssis de la roue directrice i . Alors, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis du robot est choisi centré sur S_1 (ce choix, différent de celui proposé à la section 2.3.2, sera motivé lors de la construction du modèle à la section 2.4.3), l'expression de σ pour tout élément de \mathcal{O}_{ns} est donnée par la relation C^{∞}

$$\sigma = \frac{\sum_{i=2}^{n^{\text{di}}} \sin \beta_i \sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{\sum_{i=2}^{n^{\text{di}}} \frac{\sin^2 \beta_i}{\sigma_i}} \quad (2.57) \quad \square$$

Preuve : La preuve de la Proposition 2.21 est donnée en annexe, section E.1.2. Dans ce paragraphe, nous montrons juste que la relation (2.57) ne présente pas de singularité lorsque $\beta_{1,\dots,n^{\text{di}}}$ reste dans \mathcal{O}_{ns} .

Le dénominateur de l'expression (2.57) s'annule pour les orientations suivantes des roues directrices .

$$\beta_{1,\dots,n^{\text{di}}} = (*, 0, \dots, 0)^T \quad (2.58)$$

Au vu de la définition de β_i donnée à la page 15, $\beta_i = 0$ traduit que Δ_i passe par P . Compte tenu de notre choix pour le repère attaché au châssis, i.e. $P = S_1$, toutes les orientations décrites à la relation 2.58 correspondent à un *CIR* confondu avec S_1 , c'est-à-dire appartiennent à \mathcal{O}_s . La relation (2.57) est donc sans singularité sur \mathcal{O}_{ns} . \triangleleft

2.4.3 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

La modélisation que nous proposons dans cette section exploite directement le Principe de Descartes (Théorème 2.12), c'est-à-dire nous mettons en évidence les possibilités d'évolution du robot à partir de la notion de centre instantané de rotation.

Variables apparaissant dans le modèle cinématique réduit

Par définition, un modèle cinématique réduit ne décrit que les possibilités d'évolution du châssis du robot. Le Théorème 2.3 a montré que pour obtenir cette description, il n'était pas nécessaire de prendre en compte toutes les coordonnées généralisées : on peut étudier uniquement les variables décrivant le châssis et celles décrivant l'orientation des roues directrices. Un jeu de variables permettant de décrire le châssis est ξ (Proposition 2.1). L'orientation des roues directrices, quant à elle, avait été représentée à la

section 2.3.2.a par la donnée de β_1, \dots, β_n , c'est-à-dire dans le cas des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , par (β_1, β_2) . La Proposition 2.20 montre qu'une autre possibilité, plus intéressante au niveau des singularités introduites, est (β_1, σ) . C'est cette dernière que nous utiliserons dans cette section.

Nous cherchons donc ci-dessous à caractériser les possibilités d'évolution de ξ , β_1 et σ . Dans la suite de ce mémoire, ces variables sont regroupées dans le vecteur χ

$$\chi = (\xi, \beta_1, \sigma)^T = (x, y, \theta, \beta_1, \sigma)^T \quad (2.59)$$

Possibilités d'évolution de (β_1, σ)

Le couple (β_1, σ) dont on cherche à caractériser l'évolution, peut être assimilé à des coordonnées polaires du *CIR* (Proposition 2.20). Géométriquement, il est clair que lorsque l'on évite les orientations \mathcal{O}_s , l'évolution du *CIR* ne comporte aucune restriction. Considérons en effet les 2 alternatives

Le *CIR* n'est pas à l'infini. Puisque le cas où toutes les droites Δ_i sont superposées est exclu (il appartient à \mathcal{O}_s , Définition 2.11), on peut toujours trouver 2 roues directrices dont les droites Δ_i sont sécantes. Supposons pour les besoins de notre présentation que ce soient les roues 1 et 2. Considérons maintenant qu'à partir de cette configuration des roues directrices, on procède aux ré-orientations suivantes

on garde β_1 constant, et on ré-orienté légèrement la roue 2 (ainsi que les $n^d - 2$ autres roues directrices bien sûr). Dans ce cas, le *CIR* se déplace le long de Δ_1

on garde β_2 constant, et on ré-orienté légèrement la roue 1 (ainsi que les $n^d - 2$ autres roues directrices bien sûr). Dans ce second cas, le *CIR* se déplace le long de Δ_2 .

Δ_1 et Δ_2 étant sécantes, nous venons de faire se déplacer le *CIR* selon 2 directions distinctes du plan. Donc, en combinant les ré-orientations des roues 1 et 2, il est possible de faire évoluer le *CIR* librement dans le plan.

Le *CIR* est à l'infini. Dans ce cas, les droites Δ_i associées à toutes les roues sont parallèles, mais non superposées (puisque cette dernière configuration appartient à \mathcal{O}_s , Définition 2.11). Considérons les roues directrices 1 et 2, et supposons qu'à partir de cette configuration des roues, on procède aux ré-orientations suivantes

on garde β_1 constant, et on ré-orienté légèrement la roue 2 (ainsi que les $n^d - 2$ autres roues directrices bien sûr). Dans ce cas, le *CIR* va prendre place sur Δ_1

on garde β_2 constant, et on ré-orienté légèrement la roue 1 (ainsi que les $n^d - 2$ autres roues directrices bien sûr). Dans ce second cas, le *CIR* va prendre place sur Δ_2 .

Δ_1 et Δ_2 étant 2 droites distinctes, nous venons de faire se déplacer le *CIR* selon 2 directions distinctes du plan. Donc, en combinant les ré-orientations des roues 1 et 2, il est possible de faire évoluer le *CIR* librement dans le plan.

L'évolution du *CIR* ne présente donc aucune restriction. Par conséquent, les possibilités d'évolution de (β_1, σ) sont données par

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\sigma} &= \eta_3 \end{cases} \quad (2.60)$$

avec η_2 et η_3 , 2 scalaires pouvant prendre n'importe quelle valeur dans \mathbb{R}^2

Les possibilités d'évolution pour l'orientation β_{1,\dots,n^*} de toutes les roues directrices s'expriment en fonction de η_2 et η_3 comme

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\beta}_i \ (2 \leq i \leq n^*) &= \frac{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) - \cos \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i}} \eta_2 + \frac{\sin \beta_i}{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) - \cos \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i}} \eta_3 \end{cases} \quad (2.61)$$

La première ligne de (2.61) est triviale au vu de (2.60), la preuve de la seconde est donnée en annexe, section E.1.3. Cette preuve fait apparaître que le dénominateur dans la seconde ligne de (2.61) ne s'annule que pour des vecteurs β_{1,\dots,n^*} décrivant une orientation des roues directrices pour laquelle le *CIR* est confondu avec l'un des S_i . Aucune de ces orientations des roues directrices n'appartient à \mathcal{O}_{n^*} (Définition 2.12), la relation (2.61) peut donc être utilisée sans restriction sur tout cet ensemble. Le fait que la relation (2.61) existe, constitue une seconde preuve, plus calculatoire, que β_1 et σ peuvent évoluer librement.

Possibilités d'évolution de ξ

Pour définir les possibilités d'évolution de ξ , il faut tout d'abord définir le vecteur ξ , c'est-à-dire, Proposition 2.1, préciser le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis. Nous proposons d'utiliser le repère suivant

P confondu avec S_1 ,

(\vec{i}, \vec{j}) arbitraire.

Ce repère est représenté sur la Figure 2.16. Il permet, comme cela va être montré ci dessous, d'obtenir une description des possibilités d'évolution de ξ extrêmement simple.

Soit η_1 , la vitesse linéaire de la roue 1, dont le signe est défini comme indiqué dans la note au bas de la page 63. Au vu de la Figure 2.16, nous avons

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_P = \sin \beta_1 \eta_1 \vec{i} - \cos \beta_1 \eta_1 \vec{j} \quad (2.62)$$

Nous en déduisons immédiatement que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \end{pmatrix} \eta_1 \quad (2.63)$$

Le calcul de $\dot{\theta}$ est lui aussi très simple

dans le cas où le mouvement instantané est une rotation, le Théorème 2.1 assure que

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_{CIR} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{CIRS_1} \quad (2.64)$$

(avec \vec{k} un vecteur perpendiculaire au plan d'évolution du robot). En reportant $\vec{V}_{CIR} = \vec{0}$ et (2.62) dans (2.64), on montre facilement que

$$\dot{\theta} = \sigma \eta_1 \quad (2.65)$$

dans le cas où le mouvement instantané est une translation, $\sigma = 0$ (cf. Proposition 2.20), la relation (2.65) est donc encore valide.

En combinant (2.63) et (2.65) ainsi que la matrice $R(\theta)$ définie par (2.13), nous obtenons que les possibilités d'évolution de ξ sont données par

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \\ \sigma \end{pmatrix} \eta_1 \quad (2.66)$$

Modèle cinématique réduit

Les développements précédents nous permettent d'écrire maintenant le modèle cinématique réduit

Théorème 2.13 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1
Construction basée sur le Principe de Descartes

Le modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 peut être écrit comme :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \\ \sigma \end{pmatrix} \eta_1 \\ \dot{\beta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\sigma} = \eta_3 \end{cases} \quad (2.67)$$

avec

$\xi = (x, y, \theta)^T$: vecteur décrivant la position et l'orientation du châssis (Proposition 2.1). Le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ utilisé pour définir ξ est centré sur S_1 , i.e. $P = S_1$,

(β_1, σ) : paramétrisation de l'orientation des roues directrices, correspondant aux coordonnées du CIR dans un système de coordonnées polaires (Proposition 2.20),

η_1 : degré de liberté cinématique, correspondant à la vitesse linéaire de la roue 1,

(η_2, η_3) : degrés de liberté cinématique, correspondant à la vitesse du CIR dans le plan d'évolution du robot.

Ce modèle cinématique réduit ne comporte pas d'autres singularités que celles de la paramétrisation (β_1, σ) décrivant l'orientation des roues directrices, c'est-à-dire ses seules singularités sont \mathcal{O}_s (Définition 2.11). \square

Preuve : La preuve du Théorème 2.13 est immédiate au vu des relations (2.60) et (2.66). \triangleleft

Le modèle (2.67) peut être ré-écrit sous une autre forme. Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons également une forme complètement développée (2.68), et une forme matricielle : (2.69)

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sin(\theta + \beta_1) \eta_1 \\ \dot{y} &= -\cos(\theta + \beta_1) \eta_1 \\ \dot{\theta} &= \sigma \eta_1 \\ \dot{\alpha} &= \eta_2 \\ \dot{\sigma} &= \eta_3 \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\dot{\chi} = \tilde{S}(\chi) \eta \quad (2.69)$$

où χ est donné par (2.59), $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ et \tilde{S}

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \sin(\theta + \beta_1) & 0 & 0 \\ -\cos(\theta + \beta_1) & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Le modèle cinématique réduit donné par le Théorème (2.13) peut bien sûr être utilisé pour construire le modèle dynamique réduit du robot. Dans ce cas, celui-ci s'écrit comme indiqué par le Théorème 2.14 :

Théorème 2.14 Modèle dynamique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

Sous les Hypothèses (2.7) et (2.8), le modèle dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 , réduit au seules variables utiles du point de vue de la commande, est donné par

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}} &= \bar{v} \\ \dot{\chi} &= \tilde{S}(\chi) \bar{\eta} \end{cases} \quad (2.71) \quad \square$$

Preuve : La preuve du Théorème 2.14 est immédiate au vu du Théorème 2.13 et des développements qui ont menés au Théorème 2.10. \square

Pour terminer ce chapitre, nous caractérisons l'ensemble \mathcal{O}_s en utilisant la paramétrisation (β_1, σ) .

Une orientation des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_s ne peut pas être décrite par un couple (β_1, σ) car, comme il apparaît dans la preuve de la Proposition 2.20, une infinité d'autres éléments de \mathcal{O}_s sont également associés à ce couple. Nous notons ${}^2\mathcal{O}_s$ l'ensemble des couples (β_1, σ) associés à \mathcal{O}_s quand le robot comporte ne comporte que 2 roues directrices ou $n^{dt} \geq 3$ roues directrices, mais dont les centres S_i sont alignés, et ${}^3\mathcal{O}_s$ ce même ensemble lorsque le robot comporte $n^{dt} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés. Ces 2 ensembles s'expriment comme suit

2.4. Modélisation dédiée aux robots comportant plusieurs roues directrices71

${}^3\mathcal{O}_s$. lorsqu'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 est équipé de $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, alors \mathcal{O}_s n'est constitué que par les orientations des roues directrices qui placent le CIR sur le centre d'une des roues directrices (Définition 2.11). Par conséquent, en terme de couples (β_1, σ) , ${}^3\mathcal{O}_s$ s'exprime comme

$${}^3\mathcal{O}_s = \left\{ \begin{array}{cc} (\star, \pm\infty) & (\alpha_2, \sigma_2) \\ & (\alpha_2 + \pi, -\sigma_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (\alpha_n, \sigma_n) \\ (\alpha_n + \pi, -\sigma_n) \end{array} \quad (2.72)$$

avec σ , les constantes introduites à la Proposition 2.57

${}^2\mathcal{O}_s$. lorsqu'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 est équipé de 2 roues directrices ou de $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés, une première orientation singulière des roues directrices est celle qui où toutes les droites Δ_i sont superposées. Quand les roues directrices présentent cette orientation, le CIR peut être n'importe quel point des droites Δ_i . Aussi, en terme de couples (β_1, σ) , cette orientation singulière est associée à

$$(\beta_1, \sigma) = \{(\star, \star), (\pi, \star)\} \quad (2.73)$$

\mathcal{O}_s est pour le reste, Définition 2.11, constitué par les orientations des roues directrices qui placent le CIR sur le centre d'une des roues directrices. Les couples (β_1, σ) associés à toutes ces orientations sont déjà inclus dans (2.73), excepté $(\beta_1, \sigma) = (\star, \pm\infty)$ correspondant au cas où le CIR est confondu avec S_1 . ${}^2\mathcal{O}_s$ s'exprime donc comme

$${}^2\mathcal{O}_s = \left\{ \begin{array}{cc} (\star, \pm\infty) & (0, \star) \\ & (0, \star) \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Le problème posé par les singularités du modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 pour sa commande s'exprime alors comme

“Les lois de commande construites pour un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 doivent garantir que β_1 et σ , variables d'état du modèle (2.71), ne prendront jamais les valeurs données dans ${}^2\mathcal{O}_s$ ou ${}^3\mathcal{O}_s$ (suivant le nombre et la disposition des roues directrices) pendant le déplacement du robot.”

Chapitre 3

Modélisation en présence de glissement

Les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement ne peuvent pas être systématiquement utilisées pour décrire le comportement d'un robot mobile à roues. Ce point avait été discuté à la section 2.1

Le glissement d'une roue sur le sol est un phénomène physique complexe. Aussi, l'obtention d'un modèle de robots mobiles à roues, qui rende compte du glissement, mais qui reste d'une complexité acceptable pour pouvoir être utilisé par la suite pour le calcul d'une loi de commande est un problème difficile, pour lequel aucune solution ne s'est imposée jusqu'à présent.

Notre objectif dans cette section est de présenter une étude bibliographique sur ce sujet. Les résultats présentés par des auteurs appartenant à des domaines techniques (comme les équipementiers automobiles) ou à la communauté automatique sont réécrits avec des notations uniformisées, et comparés. Nous avons divisé cette étude en 2 parties : à la section 3.1, nous détaillons la mise en équations des forces de contact pneumatique-sol, puis à la section 3.2, nous présentons des modèles de robots mobiles qui rendent compte de ces efforts.

Auparavant, nous distinguons parmi les contraintes de roulement pur sans glissement, les contraintes dites plus spécifiquement de non-glissement, et celles dites de roulement pur.

Les Hypothèses de roulement pur sans glissement assurent (Hypothèse 2.2) que la vitesse du point de contact de la roue avec le sol, notée \vec{V}_T à la section 2.3.1, est nulle. En utilisant la loi de composition des vitesses sur un corps rigide, on montre alors facilement que \vec{V}_S , vecteur vitesse linéaire au centre de la roue, vérifie

$$\vec{V}_S = r\dot{\phi}\vec{e}_r \tag{3.1}$$

avec .

r rayon de la roue,

$\dot{\phi}$ vitesse de rotation de la roue,

\vec{j}_r vecteur horizontal appartenant au plan de la roue (voir Figure 2.7).

L'équation vectorielle (3.1) peut être ré-écrite de manière équivalente

$$- \quad \|\vec{V}_S\| = r|\dot{\varphi}| \quad (3.2)$$

$$- \quad \vec{V}_S \text{ est dirigé selon le plan de la roue} \quad (3.3)$$

La relation (3.2) est dite contrainte de roulement pur, alors que la relation (3.3) est appelée contrainte de non glissement.

3.1 Modélisation des forces de contact pneumatique sol

Les forces de contact entre un pneumatique et le sol ont fait l'objet de nombreuses études de la part des équipementiers automobiles. Cette section se base sur les résultats qu'ils ont publiés.

Puisque par hypothèse, nous avons supposé qu'il n'y avait ni suspension, ni carrossage, les efforts de contact pneumatique-sol d'une roue i consistent en 3 composantes uniquement

une force longitudinale, notée $\vec{F}_{x,i}$. Cette force est principalement fonction de la différence en norme entre \vec{V}_i (vitesse linéaire du centre de la roue i) et $R\dot{\varphi}_i$ (rayon \times vitesse angulaire de la roue i). $\vec{F}_{x,i}$ a donc essentiellement rapport avec la violation de la contrainte (3.2).

une force transversale, notée $\vec{F}_{y,i}$. Cette force est principalement fonction de l'angle entre le plan de la roue i et \vec{V}_i . $\vec{F}_{y,i}$ a donc essentiellement rapport avec la violation de la contrainte (3.3).

un couple d'auto-alignement, noté $\vec{C}_{a,i}$. Ce couple tend à aligner le plan de la roue i et le vecteur vitesse \vec{V}_i de celle-ci. $\vec{C}_{a,i}$ a donc lui aussi rapport avec la violation de la contrainte (3.3).

Nous allons donner immédiatement une interprétation physique à chacune de ces 3 composantes. Auparavant, il nous faut juste, pour garantir notre propre cohérence, définir nos conventions de signe. Considérons la roue représentée sur la Figure 3.1. L'une des faces de la roue i a été particularisée, et le sens de rotation, trigonométrique ou rétrograde, de cette roue, est repéré par rapport à cette face.

Nous appellerons :

X l'axe intersection du plan horizontal passant par le centre de la roue et du plan de cette même roue, et qui est orienté de telle sorte que si la roue tourne dans le sens trigonométrique, alors elle avancera selon les X croissants.

$[X, Y, Z]$: le trièdre direct construit sur X , en ayant pris Y dans le plan horizontal passant par le centre de la roue,

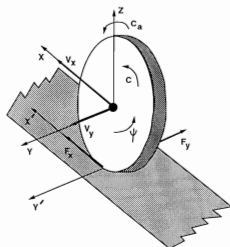


Figure 3.1: Conventions de signe

$[X', Y', Z]$ un trièdre direct, parallèle à $[X, Y, Z]$, mais ayant pour origine le centre de la zone de contact du pneumatique avec le sol.

Par convention, nous posons que

$\dot{\varphi}$, vitesse de rotation de la roue, sera positive, si la roue tourne dans le sens trigonométrique,

C , couple appliqué sur la roue, sera positif, s'il tend à faire tourner celle-ci dans le sens trigonométrique,

V_x et V_y , composantes du vecteur vitesse linéaire de la roue respectivement selon X et Y , seront positives, si \vec{V}_x et \vec{V}_y sont dirigés selon la direction donnée respectivement par l'axe X et l'axe Y

F_x et F_y , respectivement réaction longitudinale et réaction transversale du sol sur le pneumatique, seront positives, si \vec{F}_x et \vec{F}_y sont dirigés selon la direction donnée respectivement par l'axe X' et l'axe Y'

C_a , couple d'auto-alignement de la roue, sera positif, s'il tend à faire tourner la roue dans le sens trigonométrique autour de l'axe Z .

3.1.1 Phénomènes physiques

3.1.1.a Force longitudinale F_x

Raisonnons d'abord sur un pain de gomme, plaqué contre le sol par une force normale \vec{F}_N et soumis à un effort parallèle au sol \vec{F}_T (voir Figure 3.2).

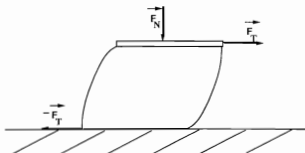


Figure 3.2: Déformation d'un pain de gomme sous l'effet d'une force longitudinale

Tant que $\|\vec{F}_T\|$ reste inférieur à un certain seuil (qui dépend de $\|\vec{F}_N\|$ et de la nature du sol), le pain de gomme se déforme mais ne glisse pas sur le sol. Ce non-glissement a pour origine les irrégularités du sol (la gomme sous l'effet de \vec{F}_N rentre dans les aspérités du sol et y prend appui pour résister à \vec{F}_T), et des forces plus microscopiques telles que les forces de Van der Waals. Une telle situation où un pain de gomme se déforme mais ne glisse pas est appelée *pseudo-glissement*. La réaction du sol sur le pain de gomme est alors tout simplement $-\vec{F}_T$.

Si l'on continue à augmenter le module de \vec{F}_T , le pain de gomme va finir par perdre adhérence et se mettra à glisser. Par opposition à la situation précédente, on dira qu'il y a *glissement effectif* ou encore plus simplement *glissement*. Dans cette situation, la réaction du sol sur le pain de gomme devient très complexe à étudier. Il est toutefois intuitif de penser que cette réaction va rester plus ou moins constante quelle que soit la valeur de $\|\vec{F}_T\|$: à partir d'un certain seuil, une augmentation de $\|\vec{F}_T\|$ se traduit, non plus par une augmentation de la réaction du sol, mais par une accélération du déplacement du pneumatique.

La surface d'un pneumatique, en contact avec le sol, est composée, en première approximation de pains de gomme indépendants (voir Figure 3.3). On nommera k , le nombre de pains de gomme en contact avec le sol à un instant donné. Un couple appliqué à la roue engendre pour chacun des pains de gomme en contact avec le sol une sollicitation longitudinale \vec{F}_T^i $i \in \{1, \dots, k\}$, dirigée selon l'axe X' de la Figure 3.1. Comme pour le pain de gomme isolé décrit ci-dessus, chaque pain de gomme de la roue en contact avec le sol va, en réponse à la sollicitation \vec{F}_T^i , être soumis à une réaction du sol et donc va

se déformer. La déformation des pains de gomme n'est pas homogène, intuitivement, il est clair que les pains de gomme situés à la sortie de la zone de contact seront plus déformés que ceux situés à l'entrée de cette même zone (ils sont restés plus longtemps en contact avec le sol). Sitôt qu'il sort de la zone de contact, le pain de gomme reprendra sa forme initiale, alors qu'un nouveau pain de gomme commencera, à l'entrée de la zone de contact, à se faire déformer (voir Figure 3.3 le couple exercé sur la roue s'oppose au mouvement, il est donc freineur). Dans le cas d'un couple moteur, nous aurions eu le même schéma, excepté que les pains de gomme auraient été inclinés, non plus de la droite vers la gauche, mais de la gauche vers la droite). Pour le moment, nous supposons que la contrainte (3.3) est satisfaite, de façon que la déformation longitudinale du pneumatique ne soit pas parasitée par un cisaillement transversal. Le cas général où ces 2 déformations se superposent sera traité à la section 3.1.3.

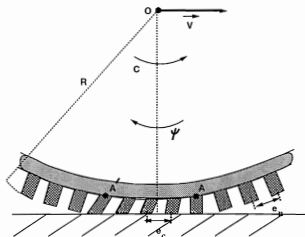


Figure 3.3: Déformation longitudinale d'un pneumatique

Si le couple appliqué sur la roue est faible, tous les pains de gomme seront en pseudo-glisserment. Dans ce cas, d'après ce qui a été dit pour le pain de gomme isolé, la réaction longitudinale \vec{F}_x du sol sur le pain de gomme i sera inversement proportionnelle à l'action \vec{F}_T du couple sur ce pain de gomme, et il en ira donc de même pour la résultante de ces forces longitudinales $\vec{F}_x = \sum_{i=1}^k \vec{F}_x^i = -\sum_{i=1}^k \vec{F}_T^i$. En revanche, si on augmente le couple appliqué à la roue, on aura une courte situation où les pains de gomme à l'entrée de la zone de contact seront en pseudo-glisserment alors que ceux placés à la sortie seront en glissement, et finalement, si on augmente toujours le couple sur la roue, tous les pains de gomme vont passer en glissement. \vec{F}_x , si l'on s'en tient à ce qui a été dit pour le pain de gomme isolé, tendra vers une valeur constante.

Des séries d'expériences ont montré que les pneumatiques réels (c'est-à-dire à surface

sculptée) ont, du point de vue bilan des forces de contact, un comportement équivalent au pneumatique simplifié étudié ci-dessus.

La force \vec{F}_x , dirigée selon l'axe X' (Figure 3.1), que l'on vient de mettre en évidence est, comme affirmé dans l'introduction de cette partie, directement reliée à la violation de la contrainte (3.2). Pour s'en convaincre on peut faire le petit raisonnement suivant appelons $\dot{\varphi}(t)$ et $V(t)$ respectivement la vitesse de rotation et la vitesse linéaire de la roue à l'instant t . Si la contrainte (3.2) était satisfaite (la contrainte (3.3) est elle, supposée satisfaite dans toute cette partie consacrée à \vec{F}_x), alors nous aurions

$$V(t) = R\dot{\varphi}(t) \quad \forall t$$

Montrons que cette relation n'est pas satisfaite. Pour cela, appelons nb le nombre de pains de gomme dont est pourvu la roue et e_n , leur espacement normal (voir Figure 3.3). Le rayon R de la roue vérifie

$$R = \frac{nb \times e_n}{2\pi}$$

Lorsque les pains de gomme rentrent en contact avec le sol, ils sont déformés, leur espacement n'est donc plus le même. Soit $e_c(t)$, l'espacement moyen des pains de gomme en contact avec le sol à l'instant t , voir Figure 3.3. Dans le cas d'un couple freineur, comme représenté sur cette figure, $e_c(t) > e_n$; dans le cas d'un couple moteur nous aurions l'inverse, i.e. $e_c(t) < e_n$. A l'instant t , le mouvement du pneumatique déformé est alors équivalent au mouvement d'un pneumatique non déformé dont les pains de gomme seraient espacés de $e_c(t)$. Dit autrement, le mouvement du pneumatique déformé est équivalent à celui d'un pneumatique non-déformé de rayon

$$R_a(t) = \frac{nb \times e_c(t)}{2\pi}$$

Nous en déduisons que

$$V(t) = R_a(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \neq R \cdot \dot{\varphi}(t) \quad \forall t$$

La contrainte (3.2) n'est donc pas vérifiée, et plus le couple freineur (resp. moteur) sera grand, plus $R_a(t)$ (appelé rayon apparent du pneumatique à l'instant t) sera grand (resp. petit), et plus la contrainte (3.2) sera violée. Ce petit exemple met bien en évidence que la déformation longitudinale du pneumatique, et par conséquent \vec{F}_x , sont directement reliés à la violation de cette contrainte.

3.1.1.b Force transversale F_y

Puisque ce modèle simplifié de pneumatique est pertinent pour décrire les forces de contact pneumatique-sol, continuons d'étudier le cas du pneumatique dont la surface est composée de pains de gomme indépendants. Supposons que la roue se déplace à vitesse constante non nulle (i.e. aucun couple moteur ou freineur n'est appliqué à la roue), de sorte que nous ne soyons pas perturbés par des glissements ou des pseudo-glissements longitudinaux (c'est-à-dire plaçons nous dans le cas où $\vec{F}_x = \vec{0}$, les pains de gomme ne sont pas déformés

longitudinalement). Si la roue avance selon une ligne droite, alors \vec{V} appartiendra au plan de la roue, la contrainte (3.3) sera dans ce cas satisfaite. Modifions alors brutalement de quelques degrés l'orientation de la roue. De manière intuitive, il est clair qu'il va apparaître, tout au moins transitoirement un *angle de dérive* δ entre le plan de la roue et son vecteur vitesse linéaire (noté \vec{V}) (voir Figure 3.4 : 4 pains de gomme ont été représentés, 2 sont en contact avec le sol figuré par une zone grisée -).

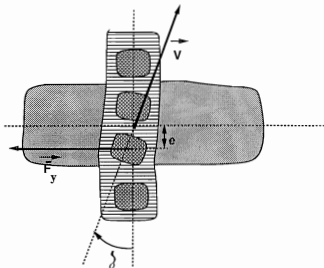


Figure 3.4: Déformation transversale d'un pneumatique

Le fait que \vec{V} ne soit plus dirigé selon le plan de la roue fait que les pains de gomme en contact avec le sol sont soumis à un cisaillement transversal. Plus le pain de gomme est situé vers la sortie de la zone de contact, plus ce cisaillement transversal sera important. En réponse à ce cisaillement, le sol exerce une réaction, notée \vec{F}_y , perpendiculaire au plan de la roue, (c'est-à-dire dirigée selon l'axe Y' (Figure 3.1)), et orientée à l'opposé du vecteur vitesse (i.e. si $V_y > 0$, alors F_y sera négative, et inversement, si $V_y < 0$, F_y sera positive). Il en résulte que les pains de gomme en contact avec le sol se déforment transversalement (voir Figure 3.4). De la même façon que pour la réaction longitudinale \vec{F}_x , la réaction transversale \vec{F}_y n'engendre pas nécessairement de dérapage latéral du pneumatique : pour un angle de dérive petit, le cisaillement transversal subi par les pains de gomme est faible, ceux-ci se déforment mais ne dérapent pas. La situation est appelée pseudo-dérive. Comme c'était le cas pour $\|\vec{F}_x\|$ en pseudo-glisement, la force transversale $\|\vec{F}_y\|$ dans ce cas sera inversement proportionnelle à l'action qui lui donne naissance, c'est-à-dire à l'angle de dérive δ . Si l'angle de dérive augmente, les pains de gomme situés à l'arrière de la zone de contact, puis tous les pains de gomme vont déraiper. Cette situation est appelée dérive de la roue. La force transversale $\|\vec{F}_y\|$, comme précédemment $\|\vec{F}_x\|$, va

alors tendre vers une constante.

3.1.1.c Couple d'auto-alignement C_a

Restons à vitesse constante (i.e. restons dans le cas où $\vec{F}_x = \vec{0}$). Si tous les pains de gomme en contact avec le sol sont en pseudo-dérive, le point d'application de \vec{F}_y sera situé en arrière du centre de la roue. Cela tient au fait que les efforts de cisaillement sur les pains de gomme vont croissant de l'entrée vers la sortie de la zone de contact (voir Figure 3.4). Cette situation engendre un couple \vec{C}_a , de support l'axe Z de la Figure 3.1 (puisque \vec{F}_y est un vecteur dans le plan du sol, le couple qu'il engendre a nécessairement pour support le vecteur perpendiculaire au sol), et de module

$$\|\vec{C}_a\| = \|\vec{F}_y\| \epsilon \quad (3.4)$$

où ϵ est la distance entre la projection sur le sol du centre de la roue et le point d'appui de \vec{F}_y (voir Figure 3.4). D'après nos conventions de signe (Figure 3.1), le couple C_a créé par un angle de dérive δ positif, sera compté positivement, puisqu'il tend à faire tourner la roue dans le sens trigonométrique. Aussi, δ et C_a , contrairement à δ et F_y , seront de même signe.

Restons sur le cas où δ est positif. D'après ce qui a été dit, C_a tend à faire tourner la roue dans le sens trigonométrique. Ce faisant, il tend à ramener le plan de la roue sur la direction du vecteur vitesse linéaire de cette roue. Autrement dit, il agit pour faire en sorte que la contrainte (3.3) redevienne satisfaite. Le couple C_a propose la même propriété lorsque δ est négatif. Pour cette raison, C_a est appelé *couple d'auto-alignement*.

Tant que tous les pains de gomme en contact avec le sol sont en pseudo-dérive, l'évolution de $\|\vec{C}_a\|$ en fonction de δ , sera semblable à celle de $\|\vec{F}_y\|$. Par contre, si on continue à augmenter δ , les pains de gomme situés à l'arrière de la zone de contact vont passer en dérive, la réaction transversale sur ces pains de gomme, d'après ce qui a été dit précédemment, ne va alors plus croître. Comme la réaction du sol sur les pains de gomme situés à l'avant de la zone de contact, et qui eux sont toujours en pseudo-dérive, continue de croître, ϵ va diminuer et $\|\vec{C}_a\|$ avec lui. Une fois que tous les pains de gomme en contact avec le sol seront en dérive, les efforts transversaux exercés sur chacun d'eux seront les mêmes, ϵ sera nul, annulant par là même $\|\vec{C}_a\|$.

3.1.2 Mise en équations des forces de contact pneumatique-sol : cas où la dérive est nulle, puis cas où le glissement est nul

Intuitivement, on perçoit assez bien que \vec{F}_x , bien que majoritairement fonction du glissement, sera également affecté par la dérive de la roue. De même, \vec{F}_y et \vec{C}_a , fonctions principalement de la dérive, seront aussi affectés par le glissement de la roue. Dans cette section, en guise de première étape, nous allons d'abord "mettre en équations" \vec{F}_x dans le cas où la dérive ou la pseudo-dérive est nulle, puis \vec{F}_y et \vec{C}_a dans le cas où le glissement

ou le pseudo-glisement est nul. Le cas général, où la dérive et le glissement sont tous les 2 non nuls sera vu à la section 3.1.3.

3.1.2.a Force longitudinale \vec{F}_x à dérive nulle

Définition de la variable de glissement g

Comme il a été vu ci-dessus, la force longitudinale \vec{F}_x est engendrée par un couple moteur ou freineur appliqué sur la roue. Une première façon de mettre \vec{F}_x en équations serait de le paramétrer par l'intensité de ce couple. En fait, il est apparu qu'une variable beaucoup plus judicieuse pour paramétrer \vec{F}_x est le glissement de la roue défini ainsi [MT92],[TC91],[Tr 92]

Définition 3.1 Variable de glissement g

Soit une roue en mouvement caractérisée par

- V , sa vitesse linéaire, et (V_x, V_y) ses composantes dans le repère $[X, Y]$ de la Figure 3.1

$\dot{\varphi}$, sa vitesse de rotation,

- R , son rayon.

On appellera glissement de cette roue, le scalaire noté g , défini par

$$\begin{cases} g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_x}{R}}{|\dot{\varphi}|} & \text{si } V_x \text{ et } \dot{\varphi} \text{ de même signe, et } |\dot{\varphi}| \geq |V_x| \text{ (phase de propulsion)} \\ g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_x}{R}}{\left| \frac{V_x}{R} \right|} & \text{si } V_x \text{ et } \dot{\varphi} \text{ de même signe, et } |\dot{\varphi}| < |V_x| \text{ (phase de freinage)} \end{cases}$$

plus les 2 conditions limites

$$\begin{cases} g = 1 & \text{dans le cas limite } V_x \text{ négative et } \dot{\varphi} \text{ positive} \\ g = -1 & \text{dans le cas limite } \dot{\varphi} \text{ négative et } V_x \text{ positive} \end{cases}$$

Si on fait l'hypothèse que les 2 cas limite ne se présentent jamais, on peut écrire g de façon plus compacte

$$g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_x}{R}}{\max\left(|\dot{\varphi}|, \left|\frac{V_x}{R}\right|\right)} \quad (3.5) \quad \square$$

Remarque 3.1 Le glissement g doit être vu comme un paramètre mesurant de combien la contrainte (3.2) est violée □

Détails : Si les contraintes de roulement pur sans glissement (3.3)-(3.2) sont satisfaites, nous avons clairement $g = 0$. Lorsque la contrainte (3.3) n'est plus vérifiée, alors, certes nous n'avons plus $V_x = V$, mais comme l'angle de dérive δ est en pratique toujours très petit (au maximum une quinzaine de degrés), nous gardons toujours $g \approx 0$. A l'inverse, lorsque la contrainte (3.2) n'est plus vérifiée, alors nous avons nettement $g \neq 0$, et ce, d'autant plus que (3.2) est violée de beaucoup. g mesure donc bien l'écart entre le système réel et l'hypothèse de non-glissement (3.2). \triangleleft

Remarque 3.2 g est une variable pertinente pour paramétrer \vec{F}_x \square

Détails : Il découle de l'interprétation de la variable g donnée à la Remarque 3.1 qu'il est équivalent de paramétrer \vec{F}_x par l'intensité du couple appliqué sur la roue ou par le glissement g de celle-ci. En effet, dans le premier cas, on aurait une vue plus macroscopique du phénomène, on paramétriserait \vec{F}_x par la contrainte physique qui crée \vec{F}_x , alors que dans l'autre, on a une vue bien plus microscopique puisqu'on paramètre l'effort longitudinal du sol sur le pneumatique \vec{F}_x par la déformation de ce dernier, déformation créée à l'origine par le couple appliqué à la roue. Intuitivement, on conçoit bien que l'expression de \vec{F}_x sera beaucoup plus facile à établir en utilisant la seconde approche plutôt que la première. Comme on ne perd pas d'information en utilisant g (puisque le couple appliqué sur la roue apparaît de toute façon dans les équations du robot, lorsque le modèle dynamique est considéré), on a tout intérêt à utiliser la seconde approche. \triangleleft

Remarque 3.3 Plage de variation du glissement g

La définition du glissement 3.1 a été choisie de telle sorte que

$$g \in [-1, 1]$$
 \square

Détails : En utilisant les notations de la Figure 3.1, si la roue tourne dans le sens trigonométrique (i.e. $\dot{\varphi} \geq 0$, nous choisirons ce sens comme étant celui de la marche avant) et que \vec{V}_x est dirigé, comme cela est naturel selon l'axe X de la Figure 3.1 (i.e. $V_x \geq 0$), nous avons :

si $\dot{\varphi} \neq 0$ et $V_x = 0$, alors $g = 1$

Nous sommes dans une situation de *patinage total*. La roue tourne sur elle-même sans avancer, comme ce serait le cas sur une plaque de glace.

si $\dot{\varphi} > \frac{V_x}{R} > 0$, alors $g \in]0; 1[$

Nous sommes dans une phase d'*accélération*.

si $\dot{\varphi} = \frac{V_x}{R} > 0$, alors $g = 0$

Nous sommes dans une phase de *roulement sans glissement*. C'est la situation vers laquelle on tend quand on maintient la vitesse constante sur une longue période.

si $\frac{V_x}{R} > \dot{\varphi} > 0$, alors $g \in]-1; 0[$

Nous sommes dans une phase de *freinage*.

si $\dot{\varphi} = 0$ et $V_x \neq 0$, alors $g = -1$

Nous sommes dans une situation de *roue bloquée*. La roue ne tourne pas sur elle-même, elle glisse seulement sur le sol.

Toute cette plage de variation est inversée lorsque l'on change le sens de rotation de la roue (i.e. $\dot{\varphi} \leq 0$, on passe en marche arrière). Si, comme il est naturel V_x est elle-aussi négative, nous avons

si $\dot{\varphi} = 0$ et $V_x < 0$, alors $g = 1$

situation de *roue bloquée*

si $\frac{V_x}{R} < \dot{\varphi} < 0$, alors $g \in]0; 1[$

phase de *freinage*.

si $\dot{\varphi} = \frac{V_x}{R} < 0$, alors $g = 0$

phase de *roulement sans glissement*.

si $\dot{\varphi} < \frac{V_x}{R} < 0$, alors $g \in]-1; 0[$

phase d'*accélération*.

si $\dot{\varphi} < 0$ et $V_x = 0$, alors $g = -1$

situation de *patinage total*.

Les 2 cas limite où $\dot{\varphi}$ et V_x ne sont pas de même signe ne peuvent guère se produire dans des conditions normales d'utilisation d'un véhicule. Il faudrait pour que cela arrive, que l'on passe brutalement la marche arrière alors que la voiture roulait en marche avant ou que la voiture parte en toupie sur un sol excessivement glissant. Comme nous avons fait l'hypothèse que ces cas extrêmes ne seraient pas rencontrés, nous nous sommes contentés, dans la Définition 3.1, de borner brutalement $|g|$ par 1. Une étude plus approfondie serait sûrement nécessaire si l'on voulait également traiter ces situations très particulières. \triangleleft

Remarque 3.4 Limite d'adhérence longitudinale g_s

Suivant la valeur de $|g|$, le contact roue-sol consiste en un pseudo-glissement (le pneumatique se déforme, mais sans que la roue glisse sur le sol) ou glissement (déformation du pneumatique et glissement effectif de la roue sur le sol). La valeur de $|g|$ qui limite ces 2 cas de figure est appelée limite d'adhérence longitudinale et notée g_s . \square

Détails : La distinction entre pseudo-glissement et glissement est mise en évidence à la section 3.1.1.a. Compte-tenu de la Remarque 3.4, nous avons donc

si $|g| < g_s$, le pneumatique se déforme, mais ne glisse pas sur le sol. Dans ce cas de figure, $\|\vec{F}_x\|$ est une fonction monotone croissante de g (cf. section 3.1.1.a).

si $|g| \geq g_s$, le pneumatique se déforme et glisse sur le sol. La valeur de $\|\vec{F}_x\|$ est alors à peu près une constante (cf. section 3.1.1.a). \triangleleft

Remarque 3.5 Interprétation physique du glissement g dans le cas du freinage

Si le couple appliqué sur la roue est freineur, alors le glissement g permet de calculer la vitesse d'un point de la ceinture du pneumatique, noté A sur la Figure 3.3. Plus précisément, $\vec{V}^A = (V_x^A, 0)$ et

$$V_x^A(t) = -\text{sign}(V_x(t)) \cdot g(t) \cdot V_x(t) \quad (3.6)$$

Détails : Puisque nous supposons dans toute cette section 3.1.2.a que la dérive est nulle, la composante \vec{V}_y^A est nulle. Donc $\vec{V} = (V_x, 0)$.

Pour prouver maintenant la relation (3.6), il suffit d'utiliser la loi de composition des vitesses

$$V_x^A(t) = V_{A/sol}(t) = V_{A/S}(t) + V_{S/sol}(t) \quad (3.7)$$

où S désigne le centre de la roue. Les 2 éléments du terme de droite de (3.7) peuvent s'exprimer en terme de $\dot{\varphi}(t)$ et $V_x(t)$, nous avons alors

$$V_{A/sol}(t) = -R\dot{\varphi}(t) + V_x(t) = V_x(t) \left(\frac{\frac{V_x(t)}{R} - \dot{\varphi}(t)}{\frac{V_x(t)}{R}} \right)$$

L'utilisation de (3.5) et du fait qu'en phase de freinage $\left| \frac{V_x(t)}{R} \right| > |\dot{\varphi}(t)|$ donne alors la relation demandée (3.6). \triangleleft

Nous constatons que même pour un glissement g petit (i.e. $|g| < g_s$), $V_x^A(t)$ est non nulle. Cela n'est pas en contradiction avec ce que nous disions à la Remarque 3.4, à savoir que tant que $|g| < g_s$ il y a pseudo-glissement, mais pas glissement effectif du pneumatique. En effet, soit un pneumatique en pseudo-glissement. Considérons le point de la ceinture du pneumatique noté A sur la Figure 3.3. Il se trouve à l'entrée de la zone de contact, le pain de gomme qui est juste sous A n'a pas encore été déformé, donc la verticale passant par A passe également par le centre du pain de gomme. A $t + \epsilon$, le point A se sera déplacé jusqu'au point A' (voir Figure 3.3). A' se trouve à la sortie de la zone de contact, le pain de gomme qui se trouve en dessous de lui a donc été déformé, et la verticale passant par A' ne passe plus par le centre du pain de gomme. La vitesse par rapport au sol d'un point de la ceinture est donc non nulle, et ce bien qu'il n'y ait pas de glissement effectif du pneumatique.

La relation (3.6) couvre toute la plage de freinage, i.e. $g \in]-1, 0]$ (dans le cas d'une marche avant). Dans le cas extrême roue bloquée ($g = -1$), on a bien que la vitesse d'un point de la ceinture est égale à la vitesse linéaire de la roue. Par contre, cette relation devient erronée dès que l'on considère une accélération, i.e. $g \in [0, 1[$ (en marche avant). Cela est assez logique au vu de notre définition de g . En effet, dans le cas d'un patinage total (i.e. $V_x^A(t) = R\dot{\varphi}(t)$ et $V_x(t) = 0$) le facteur multiplicatif liant $V_x^A(t)$ et $V_x(t)$ devrait être infini. Or nous avons choisi g de telle sorte qu'il soit borné. Pour que la relation (3.6) reste vraie, il faudrait changer la définition de g , c'est ce qu'ont fait certains auteurs, voir Remarque suivante.

Remarque 3.6 Autre définition proposée pour le glissement g dans la littérature

Les auteurs qui s'intéressent aux problèmes de glissement, ne définissent pas la variable g toujours de la même manière. La Définition 3.1 est celle proposée dans [MT92] [TC91] et [Tr 92]. D'autres auteurs (voir par exemple [BNP87] et [Sac93]), préfèrent pour des raisons de simplicité définir g comme

$$g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_x}{R}}{\left| \frac{V_x}{R} \right|} \quad (3.8)$$

quelles que soient les valeurs de $|V_x|$ et $|\dot{\varphi}|$. □

Détails : Les définitions (3.5) et (3.8) sont rigoureusement équivalentes en phase de freinage. Pour des accélérations modérées où le patinage engendré est faible, les 2 définitions restent à peu près équivalentes (puisque dans ce cas $V_x \approx \dot{\varphi}$). Ce n'est que dans le cas d'un patinage important de la roue, c'est-à-dire $V_x \ll \dot{\varphi}$ qu'une différence notable apparaît : avec la Définition 3.1 g tend dans ce cas vers 1, alors qu'avec la définition (3.8), g diverge vers l'infini.

Du point de vue des efforts de contact, les relations donnant \vec{F}_x en fonction de g sont forcément différentes suivant la définition retenue pour g , mais elles présentent la même complexité, donc il n'y a a-priori aucune raison de privilégier l'une ou l'autre des définitions. Nous avons retenu ici la Définition 3.1, car elle confère à g une certaine symétrie : dans le cas d'une marche avant, g appartient à $]0, 1[$ lorsque la roue est en phase d'accélération, et à $] -1, 0[$ lorsqu'elle est en phase de freinage. Cette définition est aussi la plus généralement utilisée dans la littérature. Dans [BNP87], les auteurs proposent la définition (3.8), mais en fait, ne se placent jamais en phase d'accélération. Dans [Sac93], l'auteur justifie son parti pris pour la définition (3.8) par le fait que dans la première partie de son rapport, il étudie un modèle cinématique de robot mobile où la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$, de la roue i fait office de commande. La Définition (3.1) était alors gênante, car la commande $\dot{\varphi}$, pouvait apparaître au dénominateur dans les équations du modèle; on perdait ainsi la dépendance affine du modèle en sa commande. Sous l'hypothèse additionnelle qu'il n'y avait pas d'accélérations violentes, et donc pas de patinage important, l'auteur s'est alors permis de définir g à partir de (3.8). ◁

Remarque 3.7 Valeur du glissement g à vitesse nulle

La Définition 3.1 du glissement g (tout comme la définition (3.8) du reste) pose problème lorsque le robot est à l'arrêt ou tend à s'arrêter dans ce cas, V_x et $\dot{\varphi}$ tendent vers 0, ce qui conduit à une valeur indéterminée pour g . □

Détails : En général, il est difficile d'avoir une idée de la valeur de g à l'arrêt. Dans le cas d'une roue isolée se déplaçant sur un sol horizontal, il n'y a aucune déformation longitudinale du pneumatique lorsque cette roue est à l'arrêt.

dans ce cas précis, à vitesse nulle $g = 0$

Par contre, si cette même roue est à l'arrêt sur un sol en pente, une force longitudinale doit exister pour empêcher la roue de glisser sur la pente, le pneumatique est déformé, et par conséquent

dans ce second cas, à vitesse nulle $g \neq 0$

Tout se complique encore quand la roue n'est plus isolée, mais appartient à un véhicule à n_r roues. On peut imaginer des dispositions et orientations des roues pour lesquelles, même sur sol horizontal, il existe un jeu de glissements g_i ($1 \leq i \leq n_r$) non tous nuls qui soit compatible avec une configuration d'équilibre. Il suffit pour cela que les efforts longitudinaux $\vec{F}_{x,i}$ correspondant aux g_i aient une résultante nulle, de même que les couples éventuels engendrés par ces efforts. Donc, à vitesse nulle, g n'est pas forcément nul, il peut au contraire prendre une valeur *a priori* quelconque, en fonction de la pente où se trouve la roue ou de la disposition des roues sur le châssis.

Cet écueil n'a pas été débattu dans la littérature. Le problème envisagé étant toujours celui du suivi d'une ligne blanche ou d'une trajectoire quelconque, l'hypothèse que la vitesse du robot mobile n'est jamais nulle a toujours été faite.

Dans le rapport [Tr 92] où le problème était de construire un simulateur pour le véhicule VERI (Véhicule Expérimental à Réflexes Interactifs), il a bien fallu traiter cette question (pour éviter que le logiciel de simulation ne "plante bêtement"). La difficulté a été évacuée en faisant converger artificiellement g vers 0 quand les vitesses tendent vers 0. La régularisation, pour des vitesses devenant très petites, a été réalisée de la manière suivante

$$g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_x}{R}}{\max(|\dot{\varphi}|, |\frac{V_x}{R}|)} \rho_g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_g = \sin \sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{k_1^2} + \frac{V_x^2}{k_2^2}} & \text{si } \sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{k_1^2} + \frac{V_x^2}{k_2^2}} < \frac{\pi}{2} \\ \rho_g = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

où k_1 et k_2 sont 2 constantes

Une régularisation du même type, mais un peu plus simple avait été évoquée dans [Sac93]. elle consistait simplement en

$$g = \frac{R\dot{\varphi} - V_x}{|V_x|} \frac{|V_x|}{(|V_x| + \epsilon)}$$

(dans [Sac93], l'auteur utilise la définition (3.8) pour g). Mais dans un cas comme dans l'autre, ces régularisations sont complètement arbitraires et donc pas du tout satisfaisantes. ◀

Evolution de \vec{F}_x en fonction de g à dérive nulle

Les raisonnements développés à la section 3.1.1 ont montré que globalement \vec{F}_x devait avoir la forme suivante

tant que le pneumatique est en pseudo-glissement, $\|\vec{F}_x\|$ croît linéairement avec g , une fois que nous sommes passés en phase de glissement, $\|\vec{F}_x\|$ reste à peu près constant.

enfin, avec les conventions de signe données par la Figure 3.1, F_x et g ont même signe. En effet, dans le cas où $\dot{\varphi}$ et V_x sont positifs, un g positif correspond à une accélération, donc \vec{F}_x doit être dirigé selon l'axe X' , i.e. $F_x \geq 0$. Inversement, un g négatif correspond à un freinage, \vec{F}_x doit être dirigé selon la direction opposée à l'axe X' , i.e. $F_x \leq 0$. Ce raisonnement reste correct quand $\dot{\varphi}$ et V_x sont tous les 2 négatifs. Donc F_x et g ont bien même signe.

Le glissement d'un pneumatique sur le sol fait intervenir tellement de lois physiques (lois mécaniques, telles que l'engrènement de la gomme sur les aspérités du sol, lois chimiques, telles que les forces de Van der Waals pour décrire le fait que la gomme "colle" sur le sol, ...) et tellement de facteurs (charge du véhicule, vitesse du véhicule, nature du sol, ...) qu'il est impossible de calculer mathématiquement l'expression de la force longitudinale F_x . Des mesures expérimentales, à l'aide de dynamomètres, ont permis de montrer que le raisonnement développé à la section 3.1.1 était juste. Pour une roue se déplaçant à 60 km.h^{-1} sur un sol d'asphalte sec et soumise à une charge $\|\vec{F}_N\|$ de 4 kN (et à dérive nulle bien sûr), on obtient la réponse F_x fonction de g donnée par la Figure 3.5 (tirée de [BNP87])

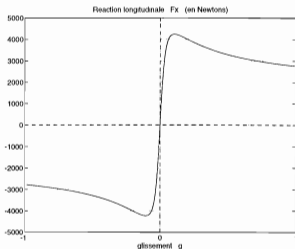


Figure 3.5: Evolution de l'effort longitudinal F_x (exprimé en N) en fonction de g

(La courbe de la Figure 3.5 a été tracée en utilisant la fonction $F_x(g)$ donnée dans [BNP87].) La partie centrale de la réponse ($g \in [-0.08, 0.08]$), qui correspond à un pseudo-glissement de la roue est, comme attendu, presque parfaitement linéaire. Au-delà, dans la zone de glissement, la valeur de F_x , décroît légèrement, puis tend à se stabiliser, comme attendu encore une fois.

La réponse F_x en fonction de g dépend fortement d'un très grand nombre de facteurs. Les principaux sont les suivants

Nature du sol les performances d'un pneumatique sont bien entendu très dépendantes de la nature du sol. Suivant que le sol consiste en de l'asphalte, de l'herbe ou de la terre, suivant que le sol est sec, mouillé, recouvert de neige ou de verglas, la réaction longitudinale du sol sur le pneumatique sera très différente. La Figure 3.6, tirée de [TC91], montre diverses réponses F_x (en accélération) suivant la nature du sol.

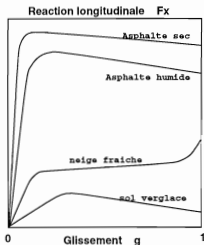


Figure 3.6: Influence (qualitative) de la nature du sol sur la réponse F_x fonction de g

Charge sur la roue : plus la charge sur la roue (notée \vec{F}_N dans la section 3.1.1) est importante, plus il y a d'inertie à vaincre pour changer la vitesse de cette roue, donc plus la réaction longitudinale \vec{F}_x du sol sur la roue aura un module important. La Figure 3.7, tirée de [BNP87], montre, pour différentes charges appliquées sur la roue, la réponse F_x fonction de g . En première approximation, on peut dire que la réaction longitudinale est proportionnelle à la charge supportée par la roue.

Vitesse linéaire de la roue sur sol sec, la vitesse linéaire V de la roue a peu d'influence sur la réaction longitudinale F_x . En revanche, sur sols mouillés, la zone de pseudo-glissement se réduit au profit de la zone de glissement au fur et à mesure que la vitesse croît (i.e. g_s décroît quand V croît).

Cela peut s'expliquer ainsi : quand un pneumatique avance sur un sol mouillé, il se crée un bourrelet d'eau devant le pneumatique. Ce bourrelet d'eau exerce sur la roue une pression hydrodynamique qui est proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle se déplace cette petite quantité d'eau, i.e. est proportionnelle au carré de la vitesse linéaire de la roue. Tant que la vitesse est faible, la pression hydrodynamique est faible devant la pression interne du pneumatique. Le bourrelet d'eau est donc poussé en avant, et ainsi la plus grande partie de l'aire de contact roue-sol est "asséchée", le sol exercera donc une réaction longitudinale F_x identique à celle qu'il exerçait dans le cas où le sol était sec (i.e. courbe donnée par la Figure 3.5). Au fur et à mesure que la vitesse croît, la pression hydrodynamique augmente et parvient à soulever la partie avant du pneumatique, réduisant par la même la zone de contact roue-sol, et donc la zone de pseudo-glissement. Le cas limite est celui où tout le

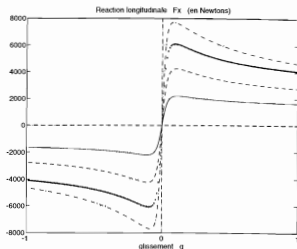


Figure 3.7: Influence de la charge de la roue sur la réponse F_x fonction de g

pneumatique est soulevé par l'eau, c'est-à-dire le pneumatique est en aqua-planing.

Ce petit raisonnement avait juste pour but de montrer que la vitesse linéaire de la roue agit sur la valeur de g_s . Maintenant, g_s ne décroît pas en pratique comme le carré de la vitesse. Ce pourrait être le cas si le pneumatique était parfaitement lisse. Mais en pratique, tous les pneumatiques sont pourvus de sculptures qui aident à "assécher" le sol, et qui donc atténuent la décroissance de g_s en fonction de V

Pression du pneumatique : régler la pression d'un pneumatique consiste en un compromis. En effet, supposons que l'on part d'un pneumatique peu gonflé. Faire croître la pression du pneumatique, fait dans un premier temps croître en proportion le module de \vec{F}_x car cela s'apparente à une charge supplémentaire sur la roue, mais dans un deuxième temps, si l'on tend à surgonfler le pneumatique, $\|\vec{F}_x\|$ va décroître car ayant trop augmenté la pression du pneumatique, on a réduit la surface de contact roue-sol. Surgonfler un pneumatique n'est en fait avantageux que sur des sols meubles, car dans ce cas, cela a pour effet de nettoyer la zone de contact, et ainsi favorise le contact roue-sol.

Température ambiante les caractéristiques de la gomme étant modifiées par la température, il en sera de même pour le contact pneumatique-sol, un pneumatique n'aura pas les mêmes propriétés si la température ambiante est de 40 °C ou si elle est négative. En règle générale, une augmentation de température étend la zone de pseudo-glissement comparativement à la zone de glissement car la gomme est plus "collante"

Caractéristiques du pneumatique les performances d'un pneumatique sont bien sûr aussi très dépendantes des caractéristiques de ce dernier elles dépendent du type de gomme utilisé, de la forme des sculptures du pneumatique, du degré d'usure,

Mise en équation de F_x

Nous avons déjà dit, qu'étant donné le nombre de phénomènes physiques mis en jeu lors du contact d'une roue sur le sol, il était impossible de calculer mathématiquement F_x en fonction de g . Néanmoins, pour écrire un modèle de robot mobile, nous avons besoin de connaître cette relation. Différents modèles, approchant le plus possible les courbes expérimentales présentées ci-dessus, ont été proposés dans la littérature.

La plupart des auteurs n'ont cherché à modéliser que la partie linéaire de la réponse F_x fonction de g , celle correspondant au régime de pseudo-glissement. En effet, quand on cherche à commander une roue, ou plus généralement un véhicule, on s'efforce, pour des raisons évidentes de sécurité, de garder g dans le domaine de pseudo-glissement. Dans la pratique, on construit même maintenant des systèmes d'anti-blocage (ABS) et d'anti-patinage (ASR) des roues, qui empêchent "définitivement" g d'entrer dans les zones respectivement de glissement en freinage et de glissement en accélération. Donc, pour la plupart des problèmes de commande de robots mobiles, un modèle linéaire de F_x est suffisant. Pour cela, nous introduisons la définition suivante

Définition 3.2 Rigidité de glissement

On appelle *rigidité de glissement*, notée G , la pente de F_x (par rapport à g) sur sa zone linéaire (i.e. sur la zone de pseudo-glissement).

Puisqu'un glissement g positif crée une réaction longitudinale F_x de même signe, G sera toujours un scalaire positif. \square

Au vu de la Définition 3.2, la réponse longitudinale F_x en fonction de g est

$$\forall |g| < g_s, \quad F_x = G.g \quad (3.10)$$

Toute la question est maintenant d'évaluer la valeur de G . La majorité des auteurs ([Sac93], [Lee92], [MCH91], [Ack92]) se placent dans des conditions particulières de sol, de pneumatique, de charge, de vitesse, ... et voient donc G comme une constante.

Dans [MT92], les auteurs proposent de faire dépendre G de la charge supportée par la roue. Au vu des résultats expérimentaux (voir Figure 3.7), la dépendance retenue est la proportionnalité, i.e.

$$G = F_N.G_1 \quad (3.11)$$

avec G_1 une constante positive.

Enfin, dans [BNP87], un modèle pour F_x incluant la zone de glissement en freinage est proposée. Pour obtenir ce modèle, une technique d'interpolation a été utilisée : les auteurs se sont définis une structure de modèle, et ont ensuite réglé les différents paramètres de ce modèle en fonction des résultats expérimentaux. Les conditions expérimentales étaient

un sol en asphalte sec,

pneumatique classique à sculptures,

température ambiante et pression du pneumatique correspondant à une utilisation normale en Europe,

vitesse linéaire de 60 km.h⁻¹,

charge F_N sur la roue, variable.

La fonction F_x obtenue dans ce cas de figure est la suivante

$$F_x = D_x \sin(C_x \arctan(B_x[(1 - E_x)100g + \left(\frac{E_x}{B_x}\right) \arctan(100B_xg)])) \quad (3.12)$$

avec B_x, C_x, D_x et E_x donnés par :

$$\begin{aligned} C_x &= 1.65 \\ D_x &= a_1 F_N^2 + a_2 F_N \\ B_x &= \frac{a_3 F_N^2 + a_4 F_N}{C_x D_x e^{a_5 F_N}} \\ E_x &= a_6 F_N^2 + a_7 F_N + a_8 \end{aligned}$$

où a_1, \dots, a_8 sont des constantes (voir [BNP87]). Lorsque nous sommes en pseudo-glissement (g petit), les fonctions \arctan et \sin peuvent être identifiées à l'identité. Dans ce cas, on retrouve bien l'équation (3.10) avec

$$G = 100 D_x C_x B_x \quad (3.13)$$

Le modèle proposé dans [BNP87] est en fait encore plus détaillé que ce que nous avons écrit ici. Les auteurs proposent une équation (3.12) qui prend en compte le carrossage des roues.

L'équation (3.12) est celle utilisée dans le simulateur du véhicule VERI développé par le CEA ([Tr 92]). Comme les expérimentations ont montré que les courbes F_x fonction de g étaient généralement anti-symétriques par rapport à $g = 0$, l'équation (3.12), validée dans [BNP87] uniquement pour le freinage, est aussi utilisée pour les phases d'accélération.

3.1.2.b Force transversale \vec{F}_y à glissement nul

Définition de la variable de dérive δ

À la section 3.1.1, nous avons mis en évidence une seconde réaction du sol, notée F_y , dirigée perpendiculairement à F_x , et liée à la violation de la contrainte (3.3), c'est-à-dire liée au fait que le vecteur vitesse linéaire d'une roue n'appartient pas tout à fait au plan de celle-ci. Pour paramétrer cette force latérale F_y , nous utiliserons la variable définie ainsi [MT92], [BNP87], [Ack92], [MCH91], [Sac93], [Tr 92]

Définition 3.3 Variable de dérive

Soit une roue en mouvement caractérisée par sa vitesse linéaire V de composantes (V_x, V_y) (voir Figure 3.1).

On appellera dérive de cette roue, le scalaire noté δ , défini par

$$\delta = \arctan \left(\frac{V_y}{|V_x|} \right) \quad (3.14) \quad \square$$

La majorité des remarques qui avaient été faites pour la variable de glissement g peuvent être reprises pour la variable de dérive δ

Remarque 3.8 La dérive δ doit être vue comme un paramètre mesurant de combien la contrainte (3.3) est violée □

Détails : Quand la contrainte de roulement pur (3.3) est satisfaite, par la définition même de cette contrainte, nous avons $V_y = 0$ et donc $\delta = 0$. Quand cette contrainte n'est plus vérifiée, V_y n'est plus nulle. δ , de par sa définition (3.14), apparaît alors comme l'angle entre \vec{V} et le plan de la roue (voir Figure 3.8).

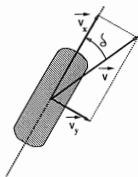


Figure 3.8: Représentation géométrique de la variable de dérive δ

δ est donc bien un paramètre permettant de mesurer l'écart entre le système réel et l'hypothèse de roulement pur (3.3). <

Remarque 3.9 δ est une variable pertinente pour paramétrer \vec{F}_y □

Détails : Il a été montré à la section 3.1.1 que la réaction \vec{F}_y du sol sur la roue avait pour origine un cisaillement transversal des pains de gomme du pneumatique, cisaillement lui-même dû au fait que le plan de la roue et le vecteur vitesse linéaire de celle-ci formaient un angle non nul. Il a été vu que plus cet angle était grand, plus le cisaillement transversal du

pneumatique était important, et donc plus \vec{F}_y présentait une grande amplitude. Comme la remarque précédente a montré que la variable δ mesurait justement l'angle entre le plan de la roue et son vecteur vitesse linéaire, il est clair que δ est une variable tout à fait pertinente pour paramétrer \vec{F}_y . \triangleleft

Remarque 3.10 Limite d'adhérence transversale δ_s

Suivant la valeur de $|\delta|$, le contact roue-sol consiste en une pseudo-dérive (le pneumatique se déforme, mais sans que la roue dérape sur le sol) ou une dérive (déformation du pneumatique et dérapage effectif de la roue sur le sol). La valeur de δ_s qui limite ces 2 cas de figure est appelée limite d'adhérence transversale et notée δ_s . \square

Détails : La distinction entre pseudo-dérive et dérive est mise en évidence à la section 3.1.1.b. Compte-tenu de la Remarque 3.10, nous avons donc

si $|\delta| < \delta_s$, le pneumatique se déforme, mais ne glisse pas sur le sol. Dans ce cas de figure, $\|\vec{F}_y\|$ est une fonction monotone croissante de δ (cf. section 3.1.1.b).

si $|\delta| \geq \delta_s$, le pneumatique se déforme et glisse sur le sol. La valeur de $\|\vec{F}_y\|$ est alors à peu près une constante (cf. section 3.1.1.b). \triangleleft

Remarque 3.11 Valeur de la dérive δ à vitesse nulle

La Définition 3.3 de la dérive δ (tout comme la Définition 3.1 pour le glissement g , cf. Remarque 3.7) pose problème lorsque le robot est à l'arrêt ou tend à s'arrêter : en effet, quand V_x et V_y tendent simultanément vers 0, la définition (3.14) de la dérive δ est indéterminée. \square

Détails : Tout comme pour g , il est très difficile d'avoir une idée de la valeur de δ à l'arrêt. En reprenant les mêmes raisonnements que ceux donnés à la Remarque 3.7, on montre facilement que δ est nul dans le cas d'une roue isolée à l'arrêt sur un sol horizontal, mais par contre, dès que la roue isolée se trouve à l'arrêt sur une pente, ou dès qu'elle n'est plus isolée, mais couplée avec d'autres roues par l'intermédiaire du châssis du véhicule, δ n'est plus forcément nul, il peut au contraire prendre des valeurs a-priori quelconques, en fonction de la pente où se trouve la roue ou de la disposition des roues sur le châssis.

Tout comme pour le cas de la variable g , personne à notre connaissance n'a proposé de fonctions régularisant correctement la variable δ quand la roue est à l'arrêt. Dans [Tr 92] et [Sac93], les auteurs font converger arbitrairement δ vers 0 quand la roue tend à s'arrêter. Dans [Tr 92], la variable δ est régularisée par les relations (3.15)

$$\delta = \arctan \left(\frac{V_y}{|V_x|} \right) \rho_\delta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\delta = \sin \sqrt{\frac{V_y^2}{k_\delta^2}} & \text{si } \sqrt{\frac{V_y^2}{k_\delta^2}} < \frac{\pi}{2} \\ \rho_\delta = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans [Sac93], elle est régularisée plus simplement par

$$\delta = \frac{V_y}{|V_x|} \frac{|V_x|}{(|V_x| + \varepsilon)}$$

Ces régularisations sont complètement arbitraires et par conséquent pas du tout satisfaisantes. Cependant, comme déjà signalés dans la Remarque 3.7, tous les problèmes de contrôle envisagés dans la littérature ont été des problèmes de suivi de trajectoire sur lesquelles on faisait l'hypothèse que le robot mobile ne s'arrêtait pas. ◁

Evolution de \vec{F}_y en fonction de δ à glissement nul

Les raisonnements développés à la section 3.1.1 ont montré que globalement \vec{F}_y doit avoir la forme suivante

tant que le pneumatique est en pseudo-dérive, $\|\vec{F}_y\|$ croît linéairement avec δ ,

une fois que nous sommes passés en phase de dérive, $\|\vec{F}_y\|$ reste à peu près constant.

enfin, avec les conventions de signes données par la Figure 3.1, F_y et δ ont des signes opposés (puisque la réaction transversale \vec{F}_y est toujours orientée à l'opposé du vecteur vitesse).

Comme pour le glissement, il est impossible de calculer mathématiquement l'expression de la force transversale \vec{F}_y . Il y a eu quelques tentatives, voir [Ell69], mais comme le dit l'auteur lui-même [Ell69, section 1.11] "Tous ces modèles comportent quelques ressemblances avec un pneumatique idéalisé, mais ce serait induire le lecteur en erreur que d'assurer qu'ils sont représentatifs de la mécanique des pneumatiques réels" "Ces modèles permettent d'étudier la stabilité du véhicule, mais pas de prédire avec précision le comportement du pneumatique" (quelques petits détails sur ces modèles seront donnés page 97). Aussi, nous nous baserons une fois de plus sur des mesures expérimentales, réalisées à l'aide de dynamomètres. Ces études ont permis de valider le raisonnement développé à la section 3.1.1. Pour une roue se déplaçant à 70 km.h^{-1} sur un sol d'asphalte sec et soumise à une charge $\|\vec{F}_N\|$ de 4 kN (et à glissement nul bien sûr), on obtient la réponse F_y fonction de δ donnée par la Figure 3.9 (tirée de [BNP87])

La partie centrale de la réponse ($\delta \in [-10^\circ, 10^\circ]$), qui correspond à une pseudo-dérive de la roue est, comme attendu, presque parfaitement linéaire. Au-delà, dans la zone de dérive, la valeur de F_y , décroît très légèrement, puis se stabilise, comme attendu encore une fois.

La réponse F_y en fonction de δ dépend des mêmes facteurs que la réponse F_x fonction de g , c'est-à-dire nature du sol, charge sur la roue, vitesse linéaire V de la roue, pression du pneumatique, température ambiante, caractéristiques du pneumatique. Chacun de ces facteurs influe sur la réponse F_y fonction de δ , exactement de la même manière qu'il influe sur la réponse F_x fonction de g .

Mise en équation de F_y

Il n'existe pas de modèle mathématique décrivant correctement la réaction transversale \vec{F}_y . Comme nous avons cependant besoin d'un modèle de \vec{F}_y pour écrire celui d'un robot mobile, l'on cherche à approcher le plus possible les courbes expérimentales présentées ci-dessus, comme cela avait déjà été fait pour la réaction longitudinale F_x .

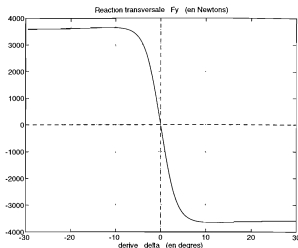


Figure 3.9: Evolution de l'effort transversal F_y (exprimé en N) en fonction de δ

De la même manière que l'on s'efforce, pour des raisons évidentes de sécurité, de garder g dans le domaine de pseudo-glissement quand on commande une roue, ou plus généralement un véhicule, on s'efforcera de garder δ dans le domaine de pseudo-dérive. Donc, en première nécessité, nous n'avons besoin que d'un modèle de la partie linéaire de la réponse F_y fonction de δ , celle correspondant au régime de pseudo-dérive. De la même façon que nous avons introduit la notion de rigidité de glissement pour F_x (Définition 3.2), nous introduisons maintenant la notion de rigidité de dérive

Définition 3.4 Rigidité de dérive

On appelle rigidité de dérive, notée D , la pente de F_y (par rapport à δ) sur sa zone linéaire (i.e. sur la zone de pseudo-dérive).

Vu que l'angle de dérive δ est de signe opposé à celui de F_y (puisque δ , au vu de la définition (3.14) est de même signe que V_y), D sera toujours un scalaire négatif. \square

Au vu de la Définition 3.4, la réponse transversale F_y en fonction de δ est :

$$\forall |\delta| < \delta_s \quad F_y = D \delta \quad (3.16)$$

Comme δ_s est en général petit (entre 5° et 15° suivant le type de pneumatique considéré, et suivant les conditions dans lesquelles il évolue), bien souvent on approxime dans (3.14) la fonction \tan par la fonction identité, ce qui, reporté dans (3.16), donne comme expression approchée, plus simple, pour F_y

$$\forall \left| \frac{V_y}{|V_x|} \right| < \tan \delta_s \quad F_y \approx D \frac{V_y}{|V_x|} \quad (3.17)$$

De la même manière que pour déterminer la valeur de G , la majorité des auteurs ([Sac93], [Lee92], [MT92], [Ack92], [MCH91]) se placent dans des conditions particulières de sols, de pneumatiques, de charge, de vitesse, de sorte que D soit une constante. Dans [MT92], de la même manière qu'ils avaient fait pour la rigidité de glissement G , les auteurs proposent de faire dépendre la rigidité de dérive linéairement en fonction de la charge appliquée sur la roue

$$D = F_N D_1 \quad (3.18)$$

avec D_1 une constante négative.

Dans [BNP87], de la même manière que pour F_x , un modèle plus complet pour F_y , incluant la zone de dérive, a été calculé à partir d'une technique d'interpolation. Les conditions expérimentales retenues pour évaluer F_y sont les mêmes que celles choisies pour F_x (énumérées page 90), sauf en ce qui concerne la vitesse linéaire de la roue, prise ici égale à 70 km.h⁻¹. La fonction F_y ainsi obtenue est la suivante :

$$F_y = D_y \sin(C_y \arctan(B_y[(1 - E_y)\delta + \left(\frac{E_y}{B_y}\right) \arctan(B_y\delta)])) \quad (3.19)$$

où :

l'angle de dérive δ doit être exprimé en *degrés* (le résultat des fonctions *arctan* et *sin*, par contre, reste, comme c'était le cas pour la fonction (3.12) donnant F_x , exprimé en *radians*),

B_y, C_y, D_y et E_y sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} C_y &= 1.30 \\ D_y &= -a_1 F_N^2 - a_2 F_N \\ B_y &= \frac{a_3 \sin(a_4 \arctan(a_5 F_N))}{C_y D_y} \\ E_y &= a_6 F_N^2 + a_7 F_N + a_8 \end{aligned}$$

où a_1, \dots, a_8 sont des constantes (voir [BNP87]).

Lorsque nous sommes en pseudo-dérive (δ petit), les fonctions *arctan* et *sin*, puisque leur résultat est exprimé en radians, peuvent être identifiées à l'identité. On retrouve alors bien dans ce cas l'équation (3.16) où

$$D = D_y C_y B_y \quad (3.20)$$

Comme pour la réaction longitudinale F_x , le modèle proposé dans [BNP87] pour la réaction transversale F_y est plus détaillé que ce que nous avons écrit ici, puisqu'il prend en compte, encore une fois, le carrossage des roues. L'équation (3.19), tout comme l'équation (3.12) est utilisée dans le simulateur du véhicule VERI du CEA ([Tr 92]).

Chercher à interpoler les courbes expérimentales F_y fonction de δ , comme cela a été fait ci-dessus, semble être l'approche qui donne les meilleurs résultats. En effet, dans [Ell69], l'auteur propose 2 méthodes pour calculer mathématiquement F_y . Ces 2 méthodes, présentées brièvement ci-dessous, ne sont pas, de l'aveu même de l'auteur (voir citation page 94) totalement satisfaisantes. Elles ont toutefois le mérite, de justifier mathématiquement certains résultats expérimentaux.

Dans la première méthode, on appelle \mathcal{M} le cercle intersection de la bande de roulement du pneumatique (i.e. la surface extérieure du pneumatique qui vient au contact du sol) et du plan vertical passant par le centre de la roue. On appelle \mathcal{C} , la courbe appartenant à la bande de roulement du pneumatique et figurant son centre. Si le pneumatique n'est pas déformé \mathcal{M} et \mathcal{C} sont confondus. Cela cesse d'être le cas si le pneumatique se déforme. La première méthode donnée dans [Ell69] repose sur l'hypothèse suivante : on peut modéliser la déformabilité du pneumatique en considérant que les courbes \mathcal{M} et \mathcal{C} sont reliées par une infinité de ressorts de raideurs k . Soit s une abscisse curviligne sur \mathcal{M} , et $p(s)$ la compression ou l'allongement du ressort positionné à l'abscisse s . Tant que nous sommes en pseudo-dérive, F_y et $p(s)$ sont reliés par un ensemble (équation différentielle ordinaire du second ordre intégrale). Il est alors possible de sortir la valeur de F_y en calculant explicitement $p(s)$ sur la partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec le sol et en utilisant la continuité de $p(s)$ aux 2 points limites de la zone où $p(s)$ n'est pas en contact avec le sol. Pour plus de détail, on pourra se référer à [Ell69]. Au-delà de la zone de pseudo-dérive, le pneumatique glisse latéralement, et l'indication $p(s)$ n'est plus directement reliée à F_y .

Le résultat final de ce calcul est que F_y dépend linéairement de δ . Autrement dit, ce calcul prouve, sur un modèle simplifié de pneumatique, ce que l'on observe sur les pneumatiques réels. Malheureusement, il ne fournit pas énormément d'indice pour l'estimation de la rigidité de dérive D . En effet, la pente de F_y par rapport à δ obtenue après calculs fait intervenir la raideur des ressorts k , raideur qui ne peut être estimée que par des mesures sur le pneumatique lui-même.

La seconde méthode doit être vue comme un raffinement de la précédente : le pneumatique, pour tout ce qui est efforts transversaux, est toujours modélisé par une infinité de ressorts de raideur k entre \mathcal{M} et \mathcal{C} , mais on introduit en plus, entre \mathcal{C} et le sol, des pains de gomme d'élasticité E . On tombe alors sur des équations différentielles du quatrième ordre. Avec quelques approximations, il est possible de sortir la valeur de F_y , qui est cette fois-ci fonction de toutes les puissances possibles de δ . Comme la puissance de δ qui a le plus de poids dans l'expression de F_y est la première, ce résultat n'est pas en contradiction avec la quasi-proportionnalité observée en pratique entre F_y et δ . Il permettrait au contraire, si tant est que l'on puisse avoir une bonne idée des valeurs de k et E , d'affiner le modèle de F_y .

Précisément, dans [Ack93], l'auteur, au lieu d'utiliser une simple proportion entre F_y et δ utilise un modèle pour F_y qui fait intervenir toutes les puissances impaires de δ . Les puissances paires n'apparaissent pas, car, vu que F_y est quasi-antisymétrique par rapport à 0, elles doivent avoir une contribution négligeable à la valeur de F_y .

Le très gros problème de cette approche, est qu'il n'est pas facile du tout de calculer les coefficients multipliant chaque puissance de δ . Ceci n'est pas traité dans [Ack93], cette modélisation de F_y n'a été introduite que pour prouver la robustesse de la loi de commande développée dans l'article.

3.1.2.c Couple d'auto-alignement \vec{C}_a à glissement nul

La troisième composante de la réaction du sol sur un pneumatique, après la réaction longitudinale \vec{F}_x et la réaction transversale \vec{F}_y , est ce que nous avons appelé dans la section 3.1.1, le couple d'auto-alignement \vec{C}_a . Comme il a été dit à la section 3.1.1, ce couple est intimement lié à la réaction transversale \vec{F}_y dont nous venons de parler — le point d'appui de \vec{F}_y , résultante des efforts transversaux sol sur pneumatique, n'est pas situé à la verticale du centre de la roue, mais un peu en arrière (du fait que le cisaillement transversal des pains de gomme en contact avec le sol va croissant au fur et à mesure que l'on progresse de l'entrée vers la sortie de la zone de contact). C'est précisément cette dissymétrie de \vec{F}_y par rapport au centre de la roue qui crée le couple \vec{C}_a . Puisque \vec{C}_a est en quelque sorte un "sous-produit" de \vec{F}_y , il est lui-aussi directement lié à la violation de la contrainte (3.3), et il paraît logique d'utiliser pour paramétrer \vec{C}_a , la même variable que celle utilisée pour paramétrer \vec{F}_y , c'est-à-dire la variable de dérive δ donnée par la Définition 3.3.

Evolution de \vec{C}_a en fonction de g à glissement nul

Les raisonnements développés à la section 3.1.1 ont montré que globalement la courbe \vec{C}_a fonction de δ (à g nul), doit avoir la forme suivante

tant que tous les pains de gomme en contact avec le sol sont en pseudo-dérive, $\|\vec{C}_a\|$ croît linéairement avec δ ,

dès que les pains de gomme situés à l'arrière de la zone de contact passent en dérive effective, $\|\vec{C}_a\|$ chute,

enfin, quand tous les pains de gomme sont en dérive, on s'attend à ce que $\|\vec{C}_a\|$ soit nul.

Avec les conventions de signes données par la Figure 3.1, C_a et δ ont le même signe (puisque \vec{C}_a tend à faire pivoter le plan de la roue, c'est-à-dire le repère $[XYZ]$, d'un angle δ pour l'aligner sur le vecteur vitesse linéaire \vec{V} de la roue).

Des études dynamométriques ont permis de valider cette intuition. Pour une roue se déplaçant à 70 km.h^{-1} sur un sol d'asphalte sec et soumise à une charge $\|\vec{F}_N\|$ de 4 kN (et à glissement nul bien sûr), on obtient la réponse C_a fonction de δ donnée par la Figure 3.10 (tirée de [BNP87]).

Cette réponse est conforme à ce que l'on attendait : on observe une partie centrale qui croît d'abord linéairement (première zone qui se termine quand le pain de gomme situé à l'arrière de la zone de contact passe en dérive effective), puis qui décroît jusqu'à zéro (zone qui se termine quand tous les pains de gomme en contact avec le sol sont passés

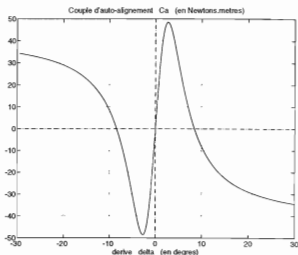


Figure 3.10: Evolution de \vec{C}_a (exprimé en Nm) en fonction de δ

en dérive). Les courbes des Figures 3.9 et 3.10 sont bien compatibles. \vec{C}_a est revenu à zéro juste quand \vec{F}_y quitte sa zone linéaire (voir Figure 3.9), ce qui est tout à fait logique puisque ces 2 changements de zone correspondent à la même situation : tous les pains de gomme en contact avec le sol sont passés en dérive. Une fois que le pneumatique est en dérive réelle, on observe sur la Figure 3.10 que le couple \vec{C}_a ne se stabilise pas à zéro comme attendu, mais reste légèrement non nul, en ayant préalablement changé d'orientation. C'est un phénomène sur lequel nous n'avons a priori aucune justification à donner, la phase de dérapage latérale étant très difficile à étudier.

Enfin, comme il était logique, des tests expérimentaux ont montré que la nature du sol, la charge sur la roue, la vitesse linéaire V de la roue, la pression du pneumatique, la température ambiante, les caractéristiques du pneumatique, influent grandement sur la réponse C_a fonction de δ , et ce, de la même manière qu'ils influent sur la réponse F_y fonction de δ ou F_x fonction de g .

Mise en équation de \vec{C}_a Comme il n'existe déjà pas de modèle mathématique décrivant correctement la réaction transversale \vec{F}_y , il est clair que nous n'avons pas non plus de modèle mathématique décrivant correctement \vec{C}_a . Donc, comme pour \vec{F}_y , il a été cherché un modèle qui approxime au mieux les courbes expérimentales.

Puisque les commandes calculées pour les robots mobiles s'efforcent, pour des raisons de sécurité, de maintenir δ dans sa zone de pseudo-dérive, nous avons surtout besoin d'un modèle de \vec{F}_y et de \vec{C}_a valide sur cette plage. \vec{F}_y y est linéaire. Aussi avons nous pu

écrire

$$\forall |\delta| < |\delta_s| \quad F_y = D\delta$$

(où D est donné par la Définition 3.4). Ici, \vec{C}_a n'est plus linéaire sur toute cette zone, il n'est linéaire que sur la partie centrale de cette zone. On peut toutefois, de la même manière que nous avons défini une rigidité de glissement G et une rigidité de dérive D , définir une rigidité d'alignement Q , mais son domaine d'utilisation sera plus restreint que pour G et D .

Définition 3.5 Rigidité d'alignement

On appelle rigidité d'alignement, notée Q , la pente de C_a (par rapport à δ) sur sa zone linéaire (i.e. sur la zone où tous les pains de gomme en contact avec le sol sont en pseudo-dérive).

Puisque \vec{C}_a tend à faire pivoter le plan de la roue (qui supporte le repère $[XYZ]$) d'un angle δ , Q sera toujours un scalaire positif. \square

Au vu de la Définition 3.5, le couple d'auto-alignement \vec{C}_a est alors donné par

$$\forall |\delta| \ll \frac{1}{2} |\delta_s| \quad C_a = Q\delta \approx Q \frac{V_y}{|V_x|} \quad (3.21)$$

(la seconde partie de l'égalité est obtenue en approximant la fonction \arctan par l'identité dans (3.14)). Pour des conditions particulières de sol, de pneumatique, de charge, de vitesse, ... Q est une constante, et peut être déterminée par quelques mesures expérimentales, ou alors, si l'on cherche à être plus précis, par une fonction linéaire de la charge supportée par la roue

$$Q = F_N \cdot Q_1 \quad (3.22)$$

avec Q_1 une constante positive.

Dans [BNP87], les auteurs, comme cela avait été fait pour \vec{F}_x et \vec{F}_y , ont proposé à partir de techniques d'interpolation, un modèle plus complet pour \vec{C}_a , incluant la zone de dérive. Les conditions expérimentales retenues pour évaluer C_a sont une nouvelle fois les mêmes que celles choisies pour F_x (énumérées page 90), sauf toujours en ce qui concerne la vitesse linéaire de la roue, prise ici égale à 70 km.h⁻¹. La fonction C_a ainsi obtenue est la suivante

$$C_a = D_c \sin(C_c \arctan(B_c [(1 - E_c)\delta + \left(\frac{E_c}{B_c}\right) \arctan(B_c \delta)])) \quad (3.23)$$

où

l'angle de dérive δ doit être exprimé en degrés (le résultat des fonctions \arctan et \sin par contre, reste, comme c'était le cas pour les fonctions (3.12) et (3.19) donnant F_x et F_y , exprimé en radians),

B_c , C_c , D_c et E_c sont donnés par les formules

$$C_c = 2.40$$

$$\begin{aligned} D_c &= -a_1 F_N^2 - a_2 F_N \\ B_r &= \frac{a_3 F_N^2 + a_2 F_N}{C_c D_c c^{a_5} F_N} \\ E_c &= a_6 F_N^2 + a_7 F_N + a_8 \end{aligned}$$

où a_1, \dots, a_8 sont des constantes (voir [BNP87]).

Lorsque nous sommes en pseudo-dérive (δ petit), les fonctions \arctan et \sin , puisque leur résultat est donné en radians, peuvent être identifiées à l'identité, et dans ce cas, on retrouve bien l'équation (3.16) avec

$$Q = D_c C_c B_r \quad (3.24)$$

Comme pour la réaction longitudinale F_x et la réaction transversale F_y , le modèle proposé dans [BNP87] pour le couple d'auto-alignement C_a est plus détaillé que ce que nous avons écrit ici, puisqu'il prend en compte, encore une fois, le carrossage des roues. Dans le simulateur du véhicule VERI du CEA ([Tr 92]), le couple d'auto-alignement des roues a été jugé négligeable, et donc n'a pas été implémenté, contrairement aux fonctions F_x et F_y données par (3.12) et (3.19).

L'approche calcul direct proposée dans [Ell69] et mentionnée ici page 97 peut être aussi appliquée à l'évaluation de C_a . En effet, une fois que la déformation latérale $p(s)$ du pneumatique a été calculée, on peut en déduire F_y , résultante des efforts transversaux sur le pneumatique, mais aussi C_a , couple d'auto-alignement de la roue. En utilisant le premier modèle cité page 97, on obtient une expression de C_a qui est proportionnelle à δ , et en utilisant le second modèle proposé, on obtient pour C_a , une expression qui fait intervenir toutes les puissances possibles de δ , c'est-à-dire nous obtenons des résultats tout à fait semblables à ceux obtenus pour F_y . Une nouvelle fois, ce petit calcul prouve, sur un modèle simplifié de pneumatique, ce que l'on observe sur les pneumatiques réels, mais reste difficilement exploitable : d'une part, on ne connaît pas précisément le coefficient de proportionnalité (car il dépend toujours de la raideur k des ressorts fictifs et éventuellement de l'élasticité E de la gomme) et d'autre part, ces calculs ne sont justes que pour des petites valeurs de δ .

3.1.3 Mise en équation des forces de contact : cas général (présence simultanée de dérive et de glissement)

Lorsque l'on conduit un véhicule, on n'utilise pas d'une part l'accélérateur ou le frein, et d'autre part le volant. Ces 2 commandes sont en général utilisées conjointement, ce qui revient à dire que l'on ne se trouve quasiment jamais dans l'une ou l'autre des 2 situations envisagées jusqu'à présent : dérive nulle ou glissement nul.

Que résulte-t-il de l'utilisation simultanée des 2 commandes ? Le pneumatique sera désormais déformé longitudinalement et transversalement, c'est-à-dire que \vec{F}_x , \vec{F}_y et \vec{C}_a seront simultanément non nuls. Nous désignerons, dans la suite de ce rapport, par \vec{F} la

réaction totale du sol sur le pneumatique, formée de F_x et de F_y

$$\vec{F} = (F_x, F_y) \quad \text{dans la base } [X, Y]$$

Le cas de figure le plus agréable pour nous, aurait été que la réaction longitudinale \vec{F}_x d'une part, et la paire réaction transversale \vec{F}_y et couple d'auto-alignement \vec{C}_a d'autre part, soient découplées, c'est-à-dire que \vec{F}_x ne dépende que du glissement g tandis que \vec{F}_y et \vec{C}_a ne dépendraient que de la dérive δ . S'il en avait été ainsi, les représentations des efforts sol sur pneumatique présentées à la section 3.1.2 dans les cas glissement pur et dérive pure auraient pu être utilisées dans le cas général, lorsque g et δ sont tous les deux non nuls. Malheureusement, il est facile de voir sur un petit exemple que nous n'avons pas un tel découplage.

Imaginons que, suite à un coup de frein trop brusque sur un sol verglacé, les roues d'un véhicule se bloquent (i.e. $g = -1$). Dans cette configuration, on a beau tourner le volant, le véhicule poursuit sa trajectoire antérieure, toute directionnalité du véhicule est perdue. Si la trajectoire suivie était une droite, le véhicule dont les roues sont bloquées continuera jusqu'à l'arrêt par une trajectoire en ligne droite, pour le plus grand malheur de son conducteur parfois. Lorsque nous étions à glissement nul, il suffisait de créer, par l'intermédiaire du volant, un angle de dérive δ , pour engendrer un effort latéral \vec{F}_y et donc pour tourner. Quand $g = -1$, quelle que soit la valeur de δ , \vec{F}_y reste nul, et le véhicule ne tourne plus. *Un même angle de dérive δ n'engendre donc pas la même force transversale \vec{F}_y suivant que g vaut 0 ou vaut -1.* Par conséquent, \vec{F}_y n'est pas fonction exclusivement de δ , elle dépend aussi du glissement g .

De la même façon, il est possible de mettre en évidence que \vec{F}_x ne dépend pas seulement de g , mais aussi de l'angle de dérive δ .

3.1.3.a Expression de F_x et F_y dans le cas général

Evolution de \vec{F} en fonction de δ et g

Puisqu'elles dépendent toutes deux des mêmes variables g et δ , les valeurs des réactions F_x et F_y du sol sur le pneumatique sont interdépendantes (ou couplées). Les expérimentations menées par les équipementiers automobiles ont permis de caractériser cette dépendance. Expérimentalement, on observe que

à dérive constante, \vec{F} , réaction totale du sol sur le pneumatique, décrit une courbe globalement elliptique dans le plan $[F_x, F_y]$ quand g varie (voir Figure 3.11).

à glissement constant, \vec{F} décrit également une courbe globalement elliptique dans le plan $[F_x, F_y]$ quand δ varie (voir Figure 3.12).

(les courbes des Figures (3.11) et (3.12) ont été tracées à l'aide des fonctions $F_x(\delta, g)$ et $F_y(\delta, g)$ données dans [BNP87] et présentées ci-après (fonctions (3.25)-(3.26)). Ces fonctions ayant été validées expérimentalement, les courbes des Figures 3.11 et 3.12 reflètent bien la réalité du contact pneumatique-sol).

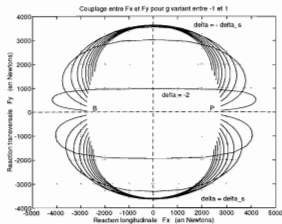


Figure 3.11: Evolution de \vec{F} en fonction de g à δ constant
Chaque courbe représente les valeurs que prend \vec{F} quand δ est maintenu constant et que g varie dans $[-1, 1]$

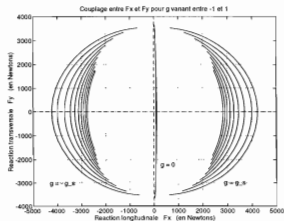


Figure 3.12: Evolution de \vec{F} en fonction de δ à g constant
Chaque courbe représente les valeurs que prend \vec{F} quand g est maintenu constant et que δ varie dans $[-30, 30]$

Considérons d'abord la Figure 3.11. Les "ellipses" figurant le vecteur \vec{F} pour différentes valeurs de δ s'appuient toutes ou plutôt, pour des raisons ici de précision numérique, tendent toutes vers 2 points, notés B et P , situés sur l'axe $F_y = 0$. Cela signifie que, quelle que soit la valeur de l'angle de dérive δ , il existe toujours 2 valeurs de g telles qu'il n'y a pas de réaction transversale du sol sur le pneumatique ($F_y = 0$). Le point B , nous en avons déjà parlé ci-dessus, correspond à la situation roue bloquée ($g = -1$), le point P , quant à lui, est la configuration symétrique, c'est-à-dire correspond à la situation de patinage total ($g = 1$) : quand la roue est bloquée ou quand elle patine, on a beau modifier l'angle de dérive, la réaction transversale F_y du sol sur le pneumatique reste nulle et il est impossible donc de modifier la trajectoire de celui-ci.

Lorsque l'on s'écarte des configurations B et P , F_y devient immédiatement non nulle, on récupère donc la faculté de diriger la roue via la variable δ . La valeur maximale de $|F_y|$ à δ constant, est toujours obtenue pour $F_x = 0$, c'est-à-dire pour $g = 0$. Pour cette configuration, la valeur de F_y lue sur la Figure 3.11 est bien entendu celle que l'on avait obtenu à la section 3.1.2, lorsque nous avons étudié la réaction transversale à glissement nul (Figure 3.9). La valeur du petit axe de "l'ellipse" correspondant à un angle de dérive δ sera égale à la valeur de $F_y^{g=0}(\delta)$ pour δ petit, "l'ellipse" correspondante sera très aplatie, sa taille augmentera jusqu'à ce que l'on arrive à "l'ellipse" associée à $\delta = \pm\delta_s$, puis diminuera légèrement quand $|\delta| > \delta_s$.

Nous venons de voir que la valeur de la réaction transversale $|F_y|$ dans le cas où il y a un couplage, c'est-à-dire quand δ et g sont tous les 2 non nuls, est toujours inférieure à $|F_y^{g=0}(\delta)|$. La réaction longitudinale $|F_x|$ se comporte d'une manière complètement symétrique. Pour constater ceci, il suffit de remarquer sur la Figure 3.12 que la valeur maximale de $|F_x|$ à g constant, est toujours obtenue pour $F_y = 0$, c'est-à-dire pour $\delta = 0$. $|F_x|$, pour une dérive δ et un glissement g sera donc toujours inférieur à $|F_x^{\delta=0}(g)|$, donné par la Figure 3.5.

La présence simultanée d'un glissement g et d'une dérive δ diminue toujours l'intensité des forces F_x et F_y exercées par le sol sur le pneumatique par rapport aux 2 cas idéaux glissement pur ($\delta = 0$) et dérive pure ($g = 0$).

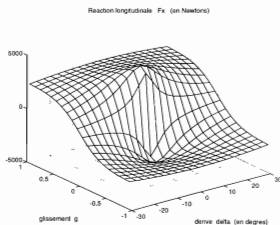
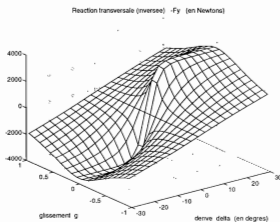
Les Figures 3.11 et 3.12 montrent bien que nous avons un couplage longitudinal-transversal très important. \vec{F} , excepté pour les petites valeurs de δ et de g , n'est pas du tout donné par une relation découplée

$$\vec{F}(\delta, g) = \vec{F}_x^{\delta=0}(g) + \vec{F}_y^{g=0}(\delta)$$

où $\vec{F}_x^{\delta=0}(g)$ et $\vec{F}_y^{g=0}(\delta)$ sont les 2 fonctions données respectivement par les Figures 3.5 et 3.9.

Les Figures 3.13 et 3.14 qui représentent respectivement la réaction longitudinale F_x et la réaction transversale F_y en fonction de δ et g , tracées toujours d'après les fonctions (3.25) et (3.26) données initialement dans [BNP87], présentent le couplage longitudinal-transversal d'une manière peut-être plus agréable pour l'œil.

On voit sur la Figure 3.13 que la réaction longitudinale dépend en fait très peu de l'angle de dérive δ la forme de la courbe reste globalement la même quel que soit δ .

Figure 3.13: Réaction longitudinale F_x en fonction de δ et g Figure 3.14: Réaction transversale F_y en fonction de δ et g

L'angle de dérive ne fait que diminuer légèrement la valeur maximum de F_x . A contrario, on constate sur la Figure 3.14, que la réaction transversale F_y dépend beaucoup de la valeur du glissement g , la forme de la fonction est au moins autant affectée par g que par δ . Et encore, la courbe de la Figure 3.14 est incomplète, des problèmes numériques ayant empêché de tracer F_y pour $g = \pm 1$. Théoriquement, les bords de cette courbe pour $g = \pm 1$ sont horizontaux et égaux à 0 (configuration roue bloquée ou patinage total).

Mise en équation de \vec{F}

Une représentation de la réaction totale \vec{F} par 2 fonctions $F_x(\delta, g)$ et $F_y(\delta, g)$ a été proposée dans [BNP87], uniquement dans le cas où la roue est *en freinage*. Néanmoins, comme les expérimentations ont montré que dans le cas d'une *accélération*, la réaction longitudinale est quasiment antisymétrique (i.e. $F_x(\delta, -g) = -F_x(\delta, g)$) et la réaction transversale quasiment symétrique (i.e. $F_y(\delta, -g) = F_y(\delta, g)$), nous avons ici, au moyen de ces symétries, étendu les fonctions $F_x(\delta, g)$ et $F_y(\delta, g)$ de [BNP87] au cas de l'accélération, comme du reste cela avait déjà été en partie fait dans [Tr 92]. Les expressions étendues, ré-exprimées avec nos conventions de signe, sont

$$F_x(\delta, g) = \frac{\sigma_x}{\sigma} F'_x(\sigma) \quad (3.25)$$

$$F_y(\delta, g) = \frac{\sigma_y}{\sigma} F'_y(\sigma) \quad (3.26)$$

avec

$$\text{sign}(V_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_x > 0 \\ -1 & \text{si } V_x < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\sigma_x = -\frac{g}{\text{sign}(V_x) + \text{sign}(|V_x| - |R\dot{\phi}|)g} \quad (3.27)$$

$$\sigma_y = \frac{\text{sign}(V_x) \tan \delta}{\text{sign}(V_x) + \text{sign}(|V_x| - |R\dot{\phi}|)g} \quad (3.28)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (3.29)$$

$$F'_x(\sigma) = -F_x^{\delta=0} \left(\frac{\text{sign}(V_x)\sigma}{1 + \sigma} \right) \quad (3.30)$$

$$F'_y(\sigma) = F_y^{g=0}(\arctan \sigma) \quad (\text{avec } \arctan \sigma \text{ exprimé en degrés}) \quad (3.31)$$

(les définitions (3.27) et (3.28) posent un problème si l'on se trouve sur la configuration roue bloquée ($g = -1$) ou la configuration patinage total ($g = 1$). Nous supposons que l'on peut être très proche de ces 2 configurations, mais que nous ne serons jamais exactement sur elles, de sorte à pouvoir continuer les calculs (ce sont les problèmes de précision numérique dont nous parlons à propos des Figures 3.12 à 3.14).

Les auteurs ont proposé les fonctions (3.25)-(3.26) en se basant sur le raisonnement suivant, raisonnement validé par leurs résultats expérimentaux

PLAÇONS NOUS D'ABORD DANS LE CAS D'UN FREINAGE (i.e. $|V_x| > |R\dot{\phi}|$) EN

MARCHE AVANT (i.e. $V_x > 0$), c'est-à-dire dans le cas étudié dans [BNP87], et introduisons le vecteur *vitesse de glissement*, noté \vec{V}_s , défini par

$$\vec{V}_s = (V_{s,x}, V_{s,y}) \triangleq \vec{V} - R\dot{\varphi}\vec{x} = (V_x - R\dot{\varphi}, V_y) \quad (\text{coord. dans le repère } [X, Y]) \quad (3.32)$$

avec \vec{x} , vecteur directeur de l'axe X . Le vecteur \vec{V}_s représente donc l'écart vectoriel entre le vecteur vitesse réelle de la roue (noté \vec{V}) et le vecteur vitesse qu'elle aurait présenté si les hypothèses (3.3)-(3.2) de roulement pur sans glissement avaient été satisfaites (c'est-à-dire $R\dot{\varphi}\vec{x}$).

Il est alors possible de donner un sens plus physique aux 2 variables σ_x et σ_y définies par (3.27) et (3.28). Nous avons

$$\sigma_x = \frac{V_{s,x}}{R\dot{\varphi}} \quad (3.33)$$

$$\sigma_y = \frac{V_{s,y}}{R\dot{\varphi}} \quad (3.34)$$

En effet, on peut montrer que les définitions (3.33) et (3.34) sont équivalentes respectivement aux définitions (3.27) et (3.28) (avec ici, on rappelle, $V_x > 0$ et $|V_x| > |R\dot{\varphi}|$) en utilisant la Définition 3.1 du glissement (dans le cas du freinage) et la Définition 3.3 pour l'angle de dérive

$$\sigma_x = \frac{V_x - R\dot{\varphi}}{|V_x|} \frac{|V_x|}{R\dot{\varphi} - V_x + V_x} = -\frac{g}{1+g}$$

$$\sigma_y = \frac{V_y}{|V_x|} \frac{|V_x|}{R\dot{\varphi} - V_x + V_x} = \frac{\tan \delta}{1+g}$$

(Note : les définitions (3.33)-(3.34) n'ont bien sûr de sens que si l'on se trouve en dehors de la configuration roue bloquée, $\dot{\varphi} \neq 0$, cas écarté ici).

Au vu de (3.33) et (3.34), les variables σ_x et σ_y , apparaissent donc comme une mesure de l'importance relative respectivement du glissement longitudinal et de la dérive transversale, dans le mouvement de la roue. Quant à la variable σ , si on considère (3.29), elle peut être interprétée, comme une représentation de la *déformation globale du pneumatique*. En fin, les 2 quotients $\frac{\sigma_x}{\sigma}$ et $\frac{\sigma_y}{\sigma}$, qui apparaissent dans (3.25) et (3.26), sont clairement, au vu de (3.33) et (3.34), les coordonnées dans $[X, Y]$ du vecteur unitaire ayant pour direction celle de \vec{V}_s :

$$\vec{V}_s = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) \|\vec{V}_s\| \quad (3.35)$$

La signification des variables σ_x , σ_y et σ étant ainsi précisée, le raisonnement qui a conduit aux fonctions (3.25)-(3.26) peut maintenant être détaillé

Structure générale

Dans le cas où le pneumatique présente la propriété d'isotropie, c'est-à-dire qu'il se déforme avec les mêmes caractéristiques dans les directions longitudinale et transversale, alors on observe expérimentalement un résultat qui paraît assez naturel, à savoir

que \vec{F} est aligné avec \vec{V}_s , vecteur vitesse de glissement. En utilisant (3.35), on peut alors proposer pour \vec{F} la structure suivante

$$\vec{F}(\sigma) = \begin{pmatrix} F_x(\sigma) \\ F_y(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_x}{\sigma} \\ \frac{g_y}{\sigma} \end{pmatrix} F(\sigma) \quad (3.36)$$

avec $F(\sigma)$ désignant le module de \vec{F} lorsque la déformation totale du pneumatique vaut σ (Nous avons, dans (3.36), juste cherché à spécifier la direction de \vec{F} . Le problème de l'orientation de \vec{F} le long de cette direction sera considéré dans la suite). Lorsque le pneumatique n'est pas isotropique, on constate expérimentalement (et cela semble encore une fois relativement naturel) que la structure (3.36) est modifiée comme suit

$$\vec{F}(\sigma) = \begin{pmatrix} F_x(\sigma) \\ F_y(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_x}{\sigma} F'_x(\sigma) \\ \frac{g_y}{\sigma} F'_y(\sigma) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

où $F'_x(\sigma)$ et $F'_y(\sigma)$ sont des fonctions représentatives des caractéristiques de déformation du pneumatique, respectivement longitudinalement et transversalement. Le cas isotropique se retrouve immédiatement en écrivant $F'_x(\sigma) = F'_y(\sigma) = F(\sigma)$.

Le développement ci-dessus justifie la structure des fonctions (3.25)-(3.26). Reste maintenant à proposer un modèle pour les fonctions $F'_x(\sigma)$ et $F'_y(\sigma)$

fonctions $F'_x(\sigma) = F'_y(\sigma)$

Les fonctions $F'_x(\sigma) = F'_y(\sigma)$ ont été calculées en écrivant que

$$\text{Si } \delta = 0 \quad F_x(\sigma) = \frac{\sigma_x}{\sigma} F'_x(\sigma) = F_x^{\delta=0}(g) \quad (3.38)$$

$$\text{Si } g = 0 \quad F_y(\sigma) = \frac{\sigma_y}{\sigma} F'_y(\sigma) = F_y^{g=0}(\delta) \quad (3.39)$$

calcul de $F'_x(\sigma)$

Dans le cas particulier $\delta = 0$, on a (d'après (3.33)) la relation

$$\sigma = |\sigma_x| = \sigma_x = -\frac{g}{1+g} \quad (\text{pour un freinage en marche avant, on a } g < 0) \quad (3.40)$$

La relation (3.40) s'inverse et donne

$$g = -\frac{\sigma}{1+\sigma} \quad (3.41)$$

et en reportant (3.41) dans $F_x^{\delta=0}(g)$, on obtient

$$F_x(\sigma) = F_x^{\delta=0}\left(-\frac{\sigma}{1+\sigma}\right) = -F_x^{\delta=0}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right) \quad (\text{car } F_x^{\delta=0}(g) \text{ est impaire}) \quad (3.42)$$

Etant donné qu'à dérive nulle, $\frac{g_x}{\sigma} = 1$, la relation (3.38) nous impose le choix

$$F'_x(\sigma) = -F_x^{\delta=0}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right) \quad (3.43)$$

Pour le moment, nous ne traitons que le cas où $V_x > 0$ et $|V_x| > |R\dot{\varphi}|$ (cas du freinage en marche avant). La définition (3.43) obtenue correspond alors bien à la définition générale (3.30)).

calcul de $F'_y(\sigma)$

Dans le cas particulier $g = 0$, on a (d'après (3.34)) la relation

$$\sigma = |\sigma_y| = \text{sign}(\delta) \tan \delta \quad (3.44)$$

En reportant directement (3.44) dans $F_y^{g=0}(\delta)$, on obtient

$$F_y(\sigma) = F_y^{g=0}(\text{sign}(\delta) \arctan \sigma) = \text{sign}(\delta) F_y^{g=0}(\arctan \sigma) \quad (3.45)$$

Lorsque le glissement g est nul, $\frac{g_x}{\sigma} = \text{sign}(\delta)$, la relation (3.39) nous impose alors le choix

$$F'_y(\sigma) = F_y^{g=0}(\arctan \sigma) \quad (3.46)$$

On vérifie bien que la relation (3.46) est en accord avec la définition générale (3.31) (il suffit pour retrouver (3.46) de reporter $V_x > 0$ et $|V_x| > |R\dot{\varphi}|$ dans (3.31)).

Nous venons de prouver que les fonctions $F'_x(\sigma)$ et $F'_y(\sigma)$ données respectivement par (3.43) et (3.46) sont correctes dans 2 cas très précis lorsque $g = 0$ ou lorsque $\delta = 0$. Nous n'avons pas établi par la théorie que ces 2 fonctions restent pertinentes lorsque g et δ sont quelconques. Les expérimentations menées dans [BNP87] l'ont prouvé.

CAS D'UN FREINAGE EN MARCHÉ ARRIÈRE, ET CAS D'UNE ACCÉLÉRATION

Dans [BNP87], les auteurs ne s'étaient intéressés qu'au cas du freinage en marche avant, dont nous venons de parler. En utilisant les propriétés de symétrie et d'antisymétrie des réactions sol sur pneumatique, très généralement observées lors d'expérimentations, il est possible de proposer pour \vec{F} un modèle plus général, qui inclut le freinage en marche arrière et les phases d'accélération. Ce modèle est donné par les équations (3.25) à (3.31). Il a été obtenu à partir des fonctions (3.37)-(3.43)-(3.46) sur la base des raisonnements suivants

Freinage en marche arrière

Etre en marche avant ou en marche arrière ne change rien au niveau de l'amplitude des forces de réaction du sol sur le pneumatique si les conditions de glissement longitudinal et de dérive sont identiques, \vec{F} aura bien évidemment même norme que l'on soit en marche avant ou en marche arrière. La direction du vecteur \vec{F} par contre, est modifiée. Nous aurons précisément que

le signe de F_x est inversé : une force de freinage, par nature, s'oppose au mouvement. Donc, si le sens du mouvement est inversé, celui de F_x le sera aussi.

le signe de F_y reste identique : en effet les vecteurs \vec{F}_y et \vec{V}_y se trouvent, par nature, de part et d'autre du plan de la roue. Donc si V_y reste de même signe, F_y lui-aussi conservera son signe.

Les fonctions (3.25)-(3.26) modélisent tout à fait ce comportement : si $\text{sign}(V_x) = -1$ (et toujours $\text{sign}(|V_x| - |R\dot{\varphi}|) = 1$, cas du freinage), nous avons

g change de signe (Définition 3.1),

σ_x , σ_y et σ gardent alors exactement la même valeur qu'en marche avant,

F_x change bien de signe alors que F_y garde le sien.

cas d'une accélération

Les expérimentations ont montré que l'on avait les symétries suivantes entre l'accélération et le freinage :

$$F_x(\delta, -g) = -F_x(\delta, g) \quad (3.47)$$

$$F_y(\delta, -g) = F_y(\delta, g) \quad (3.48)$$

Les fonctions (3.25) et (3.26) ont été construites de manière à ce que les relations (3.47) et (3.48) soient satisfaites. Vérifions que ces relations sont effectivement satisfaites dans le cas de la marche avant (i.e. $\text{sign}(V_x) = 1$)

freinage $\text{sign}(V_x - R\dot{\varphi}) = 1$		accélération $\text{sign}(V_x - R\dot{\varphi}) = -1$	
g		$-g$	
	devient		
δ		δ	
σ_x		$-\sigma_x$	
σ_y	devient	σ_y	
σ		σ	
F_x		$-F_x$	
	devient		
F_y		F_y	

Les relations (3.47) et (3.48) sont effectivement satisfaites, il en va de même pour la marche arrière.

Les Figures 3.11 à 3.14 ont été tracées à partir des fonctions (3.25)-(3.26). Les expérimentations menées dans [BNP87] ont montré que ce modèle donnait des résultats satisfaisants. Néanmoins, il n'est pas encore parfait. En effet, dans la réalité, un pneumatique est soit complètement en dérapage (longitudinalement *et* transversalement), ou soit complètement adhérent au sol. Une situation où le pneumatique serait en dérapage dans une direction et adhérent dans l'autre, n'a, d'un point de vue physique, aucun sens. Or, avec le modèle proposé (3.25)-(3.26), une telle situation absurde peut se produire. Il suffit, pour mettre cela en évidence, de rechercher la valeur de σ , appelée σ_s , pour laquelle le pneumatique perdrait adhérence. Dans le cas où $\delta = 0$ (glissement pur), le pneumatique glisse dès que $|g| > g_s$, où g_s est la valeur de g qui limite la zone linéaire de $F_x^{\delta=0}(g)$. σ_s se calcule alors à partir de (3.29) et de la valeur seuil g_s ; il correspond tout naturellement à

la limite de la zone linéaire de $F'_x(\sigma)$. Dans le cas où $g = 0$ (dérive pure), le pneumatique glisse dès que $|\delta| > \delta_s$, où δ_s est la valeur de δ qui limite la zone linéaire de $F_y^{g=0}(\delta)$. σ_x se calcule de même à partir de (3.29) et de la valeur seuil δ_s , il correspond à la limite de la zone linéaire de $F'_y(\sigma)$. Si maintenant g et δ sont tous les 2 non nuls, et que l'on suit ce raisonnement, le pneumatique semblera glisser longitudinalement dès que $\sigma > \sigma_x^s$, où σ_x^s est la limite de la zone linéaire de $F'_x(\sigma)$, et il semblera glisser transversalement dès que $\sigma > \sigma_y^s$, où σ_y^s est la limite de la zone linéaire de $F'_y(\sigma)$. Si on a $\sigma_x^s \neq \sigma_y^s$, nous aboutissons bien sur la conclusion, absurde, que le pneumatique pourrait déraiper dans une direction et pas dans l'autre (pour $\sigma \in [\min(\sigma_x^s, \sigma_y^s), \max(\sigma_x^s, \sigma_y^s)]$). Le modèle proposé (3.25)-(3.26) ne reflète donc pas exactement la réalité. Fort heureusement, en général $\sigma_x^s \approx \sigma_y^s$, et donc les fonctions (3.25)-(3.26) sont réalistes (les Figures 3.11 à 3.14, tracées à l'aide des fonctions (3.25)-(3.26) sont assez fidèles aux expérimentations). Cependant, dans [BNP87], les auteurs ont voulu proposer une modélisation plus fine, qui traite de manière théorique ce dernier petit problème.

Pour cela, ils proposent de paramétrer les efforts longitudinaux et transversaux, non plus en utilisant σ_x , σ_y et σ , mais au moyen des variables σ_x^* , σ_y^* et σ^* définies comme suit :

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{\sigma_x^s} \quad (3.49)$$

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_y}{\sigma_y^s} \quad (3.50)$$

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_x^{*2} + \sigma_y^{*2}} \quad (3.51)$$

σ^* pourrait être appelée *déformation globale normalisée* du pneumatique.

La structure générale des efforts pneumatique-sol qui est proposée est alors la suivante

$$F_x(\delta, g) = \frac{\sigma_x^*}{\sigma^*} F_x''(\sigma^*) \quad (3.52)$$

$$F_y(\delta, g) = \frac{\sigma_y^*}{\sigma^*} F_y''(\sigma^*) \quad (3.53)$$

Cette structure est très semblable à la structure (3.25)-(3.26) que nous avons considérée jusqu'à présent. Ainsi, les fonctions $F_x''(\sigma^*)$ et $F_y''(\sigma^*)$ qui interviennent dans ce nouveau modèle se calculent en suivant exactement la même méthode que celle utilisée précédemment pour calculer les fonctions $F'_x(\sigma)$ et $F'_y(\sigma)$:

à dérive nulle, nous avons :

$$\sigma^* = |\sigma_x^*| = \frac{|\sigma_x|}{\sigma_x^s} = \frac{\sigma}{\sigma_x^s}$$

L'exigence (3.38) nous conduit alors à

$$F_x''(\sigma^*) = -F_x^{\delta=0} \left(\frac{\text{sign}(V_x) \sigma^*}{\frac{1}{\sigma_x^s} + \sigma^*} \right) \quad (3.54)$$

à glissement nul, nous avons

$$\sigma^* = |\sigma_y^*| = \frac{|\sigma_y|}{\sigma_y^*} = \frac{\sigma}{\sigma_y^*}$$

Sachant qu'à glissement nul, la variable v vaut 1 (voir discussion ci-dessous sur la variable v), l'exigence (3.39) nous conduit alors à

$$F_y''(\sigma^*) = F_y^{g=0}(\arctan(\sigma_y^* \sigma^*)) \quad (3.55)$$

Le modèle (3.52)-(3.53) reste donc très semblable au modèle (3.25)-(3.26) précédemment développé. Néanmoins, d'un point de vue théorique, le premier modèle est beaucoup moins satisfaisant que le second, puisque la situation absurde où le pneumatique déraperait dans une direction et pas dans l'autre, et qui pouvait se produire avec le modèle (3.25)-(3.26), ne peut pas apparaître avec le modèle (3.52)-(3.53) en effet, au vu des fonctions $F_x''(\sigma^*)$ et $F_y''(\sigma^*)$, si $\sigma^* < 1$, le pneumatique est en pseudo-glissement et pseudo-dérive, à l'inverse, si $\sigma^* > 1$, le pneumatique est en glissement et dérive, mais ce modèle ne conduit jamais à la situation absurde mentionnée ci-dessus, il reflète donc mieux la réalité du contact roue-sol que le modèle (3.25)-(3.26).

La contre-partie de ce perfectionnement du modèle, est l'augmentation notable de sa complexité dans le modèle (3.25)-(3.26), la direction de la force \vec{F} nous était donnée via le couple (σ_x, σ_y) . Ce couple de variables n'apparaît plus dans le modèle (3.52)-(3.53), et le couple (σ_x^*, σ_y^*) qui tient sa place ne lui est pas proportionnel. Il a donc été nécessaire d'introduire une variable supplémentaire, appelée *facteur de direction*, et notée v , pour recouvrer l'information sur la direction de \vec{F} . Le très gros problème est que v est une fonction qui dépend de δ et g , mais dont il n'est pas connu de représentation analytique. Le seul cas où la valeur de v est bien définie, est le cas $\delta = 0$ (cas dérive nulle), où pour les besoins de la construction du modèle, v est fixé à 1 (voir ci-dessus). Sinon, dans [BNP87], les auteurs ont été obligés de proposer au lecteur plusieurs faisceaux de courbes pour lui permettre d'estimer cette nouvelle variable v . D'un point de vue conceptuel, le modèle (3.52)-(3.53) est certes, beaucoup plus satisfaisant que le modèle (3.25)-(3.26), car, de part sa construction, il modélise bien le fait que lorsque le pneumatique dérape, il dérape longitudinalement et transversalement, ce qui n'était pas toujours le cas avec le couple (3.25)-(3.26). Cependant, du fait de la présence de la fonction non-analytique v , le dernier modèle proposé est difficile à manier. Aussi, vu que le modélisation (3.25)-(3.26), est, dans la plupart des cas, assez proche malgré tout de la réalité, on la préfère, en pratique, au modèle donné par les fonctions (3.25)-(3.26).

Parmi les autres raffinements possibles que les auteurs proposent à la fin de l'article [BNP87] pour améliorer la modélisation de \vec{F} , l'un consiste à modifier l'un des coefficients de F_y en fonction de la réaction longitudinale. Précisément, les expérimentations ont montré qu'il convenait d'ajouter au coefficient B' de la fonction (3.19), la quantité

$$\Delta B' = -\Upsilon B' F_x(\delta, g) \quad (3.56)$$

où Υ est une fonction positive de δ et g , mais pour laquelle, encore une fois, aucune représentation analytique n'a pu être proposée. Comme l'amélioration apportée est très minime, ce raffinement n'est généralement pas utilisé en pratique.

Découplage entre F_x et F_y lorsque g et δ sont faibles

Comme cela a déjà été dit à la section 3.1.2, on s'efforce, dans tous les problèmes de commande, de maintenir g et δ dans leur zone respectivement de pseudo-glissement et de pseudo-dérive (et ce, pour des raisons évidentes de sécurité). Dans ce cas, c'est-à-dire si g et δ sont vraiment très petits, on peut en première approximation conserver pour F_x et F_y les expressions *linéaires et découplées* (3.10) et (3.16). Ce résultat peut être montré comme suit. Nous raisonnerons sur la modélisation (3.25)-(3.26). La modélisation (3.52)-(3.26), pour les raisons expliquées ci-dessus, est laissée de côté

Plaçons nous uniquement dans le cas d'un freinage en marche avant ($\text{sign}(V_x) = 1$ et $\text{sign}(|V_x| - |R\dot{\phi}|) = 1$). Si g et δ sont très petits, alors d'après (3.27) et (3.28)

$$\sigma_x \approx -g \quad (3.57)$$

$$\sigma_y \approx \tan \delta \approx \delta \quad (\text{avec } \delta \text{ alors exprimé en radians}) \quad (3.58)$$

En reportant (3.57) et (3.58) dans (3.29), on obtient que la variable σ sera, dans ce cas, elle-aussi très petite, et que donc

$$-\frac{\sigma}{1+\sigma} \approx -\sigma \quad (3.59)$$

$$\arctan \sigma \approx \sigma \quad (3.60)$$

Les relations (3.59) et (3.60), reportées dans (3.30) et (3.31), puis dans (3.12) et (3.19), conduisent alors, au vu de (3.13) et (3.20), aux approximations

$$F'_x(\sigma) \approx G\sigma \quad (3.61)$$

$$F'_y(\sigma) \approx D\sigma \quad (3.62)$$

En reportant (3.61) et (3.62) dans (3.25) et (3.26), et en utilisant (3.57) et (3.58), on aboutit bien au résultat énoncé ci-dessus, à savoir que

$$F_x(\delta, g) \approx Gg \quad (3.63)$$

$$F_y(\delta, g) \approx D\delta \quad (3.64)$$

La quasi-totalité des articles traitant de la commande des robots mobiles utilisent, comme modèle des réactions sol sur pneumatique, le modèle linéaire et découplé (3.63)-(3.64).

3.1.3.b Expression de C_a dans le cas général

Le couple d'auto-alignement \vec{C}_a tire son origine dans le fait que la force transversale \vec{F}'_y appliquée à une roue n'a pas pour point d'application le centre de la roue, mais est située en général un peu en arrière (par rapport au sens de marche de la roue, voir section 3.1.1). Etant donné que dans le cas général, la force transversale \vec{F}'_y est fonction à la fois de l'angle de dérive δ et du glissement longitudinal g (voir la discussion section précédente), il en va naturellement de même pour le couple \vec{C}_a , et l'expression (3.23) proposée pour \vec{C}_a dans

le cas dérive pure est inexacte dans le cas général où δ et g sont non nuls simultanément. Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que lorsque $|g|$ augmentait, $\|\vec{F}_y(g, \delta)\|$ diminuait (voir Figure 3.14), on s'attend donc à ce que $\|\vec{C}_a(g, \delta)\|$ en fasse de même. C'est bien ce qui est observé expérimentalement, comme le montre la Figure 3.15.

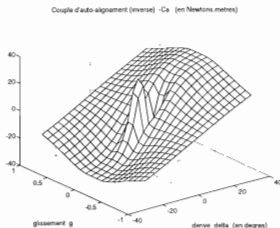


Figure 3.15: Couple d'auto-alignement C_a en fonction de δ et g

(La courbe de la Figure 3.15 a été tracée à l'aide de la fonction $C_a(\delta, g)$ donnée dans [BNP87] et présentée ci-après (fonction (3.65)). Cette fonction ayant été validée expérimentalement, la courbe obtenue reflète bien la réalité du contact pneumatique-sol).

Dans [BNP87], les auteurs proposent, lorsque l'on se trouve dans le cas général, de modéliser \vec{C}_a comme suit

$$C_a(g, \delta) = \frac{\sigma_y}{\sigma} C_a^{g=0}(\arctan \sigma) \quad (3.65)$$

où la fonction $C_a^{g=0}(\cdot)$ est donnée par (3.23).

Le modèle (3.65) pour \vec{C}_a apparaît comme tout à fait naturel au vu de la modélisation proposée pour la force transversale \vec{F}_y que nous soyons en dérive pure ($g = 0$) ou dans le cas général, la magnitude de \vec{C}_a est toujours donnée par la relation (3.4). Si e , distance entre la projection sur le sol du centre de la roue et le point d'appui de \vec{F}_y (voir Figure 3.4), est comptée négativement si le point d'appui de \vec{F}_y est en arrière du centre de la roue par rapport au sens de marche (cas présenté sur la Figure 3.4), la relation (3.4) peut être ré-écrite de façon algébrique comme suit

$$C_a(g, \delta) = e(g, \delta) F_y(g, \delta) \quad (3.66)$$

$F_y(g, \delta)$ a déjà été modélisé (fonction (3.26)). La seule inconnue dans (3.66) est en fait la fonction $e(g, \delta)$. Dans le cas dérive pure, la fonction e peut être aisément calculée à partir de (3.23), (3.19) et (3.66). Nous avons

$$\begin{cases} \text{si } \delta = 0 & e^{g=0}(\delta) = 0 \\ \text{sinon} & e^{g=0}(\delta) = \frac{C_a^{g=0}(\delta)}{F_y^{g=0}(\delta)} \end{cases} \quad (3.67)$$

Dans le cas général, des expérimentations ont montré que la fonction (3.67) restait valable, à condition de remplacer δ par $\arctan \sigma$ (c'est exactement la même substitution de variables que celle qui avait été faite pour obtenir la fonction (3.31) dans le cas de la réaction transversale). Donc, dans le cas général, la variable e peut être représentée par la fonction

$$\begin{cases} \text{si } g = \delta = 0 & e(g, \delta) = 0 \\ \text{sinon} & e(g, \delta) = \frac{C_a^{g=0}(\arctan \sigma)}{F_y^{g=0}(\arctan \sigma)} \end{cases} \quad (3.68)$$

En reportant (3.68) dans (3.66) et en utilisant (3.26), on retombe bien sur la modélisation (3.65) proposée pour \tilde{C}_a . Les expérimentations menées par les auteurs de [BNP87] ont montré que cette modélisation était globalement très satisfaisante, il y a juste des petites erreurs qui apparaissent pour des g très importants.

La modélisation (3.26) de l'effort transversal $F_y(g, \delta)$ est celle généralement utilisée pour simuler le contact pneumatique-sol. Néanmoins, il existe une modélisation plus fine : la fonction (3.53). Si l'on fait le choix d'utiliser, malgré sa plus grande complexité, cette seconde modélisation, il est bien sûr possible d'affiner de manière similaire le modèle de $C_a(g, \delta)$. En calquant sur le modèle (3.65) ce qui a été fait pour passer de (3.26) à (3.53)-(3.55), on obtient le modèle suivant pour $C_a(g, \delta)$.

$$C_a(g, \delta) = \frac{\sigma_x^*}{\sigma^*} C_a^{g=0}(\arctan \sigma_y^* \sigma^*) \quad (3.69)$$

où la fonction $C_a^{g=0}(\cdot)$ est toujours donnée par (3.23). De même que pour les 2 modèles (3.26) et (3.53) pour $F_y(g, \delta)$, la différence entre les 2 modèles (3.65) et (3.69) pour $C_a(g, \delta)$ est avant tout théorique, la seconde modélisation est dans chaque cas plus satisfaisante, car elle assure que la situation absurde où le pneumatique glisserait dans une direction et pas dans l'autre ne peut jamais se produire. Cependant, comme σ_x^* et σ_y^* ont en général des valeurs voisines, la première modélisation est, en pratique, souvent admissible.

Si l'on souhaite améliorer encore le modèle (3.69), les auteurs suggèrent à la fin de l'article [BNP87] de prendre en compte la flexibilité de la carrosserie qui porte les roues. En effet, si la structure qui tient les différentes roues du robot est flexible (et c'est toujours le cas dans la réalité), les efforts longitudinaux et transversaux \vec{F}_x et \vec{F}_y n'ont pas comme point d'appui, le point de la zone de contact pneumatique-sol qui est à la verticale du centre de la roue, mais un point légèrement décalé. Ce léger décalage affecte la valeur du couple d'auto-alignement C_a . Les auteurs de [BNP87] proposent, pour tenir compte de la

flexibilité de la carrosserie, d'ajouter à la valeur de C_a donnée par (3.69), la quantité

$$\Delta C_a(g, \delta) = - \left(\frac{1}{L_y} - \frac{1}{L_x} \right) F_x(g, \delta) F_y(g, \delta)$$

où

$F_x(g, \delta)$ et $F_y(g, \delta)$ sont les fonctions données respectivement par (3.52) et (3.53),

L_x et L_y sont respectivement l'élasticité longitudinale et transversale de la carrosserie.

Enfin, si l'on suppose que le glissement longitudinal g et l'angle de dérive δ restent dans le domaine respectivement des pseudo-glissements et pseudo-dérives (cas généralement rencontré en pratique, pour des raisons évidentes de sécurité), il est facile de voir que l'expression *linéaire et découplée* (3.21) est une approximation satisfaisante de $C_a(g, \delta)$ (tout comme (3.10) et (3.16) étaient, dans ce cas de figure, des approximations satisfaisantes pour $F_x(g, \delta)$ et $F_y(g, \delta)$, voir section précédente). En effet, les relations (3.58) et (3.60) restent valides, et (si l'on raisonne sur le modèle classique (3.65)), en reportant (3.58) et (3.60) dans (3.65), (3.23) et (3.24), on aboutit bien à la forme linéaire découplée (3.21).

3.1.4 Lien entre les modèles proposés et l'expression des efforts roues-sol dans le cas roulement pur sans glissement

Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, l'expression des efforts pneumatique-sol peut se calculer instantanément depuis les équations du mouvement : il suffit pour cela de prémultiplier à gauche par $A^T(q)$ les équations (2.45) et (2.48) d'Euler-Lagrange du robot considéré, ce qui donne :

$$A^T(q)M(q)\dot{S}(q)\ddot{\eta} = A^T(q) \left[C(q, \dot{q}) + F(q, \dot{q}) + Bu - M\dot{S}(q)\ddot{\eta} \right] \quad (3.70)$$

puis de reporter la structure (2.43) de $F(q, \dot{q})$ dans (3.70) :

$$A^T(q)M(q)\dot{S}(q)\ddot{\eta} = A^T(q) \left[C(q, \dot{q}) + Bu - M\dot{S}(q)\ddot{\eta} \right] + (A^T(q)A(q))\lambda \quad (3.71)$$

La matrice $A^T(q)A(q)$ étant forcément inversible, l'expression des forces de contact roues-sol est nécessairement

$$F(q, \dot{q}) = A(q)\lambda \quad (3.72)$$

$$\lambda = (A^T(q)A(q))^{-1}A^T(q) \left[-C(q, \dot{q}) - Bu + M\dot{S}(q)\ddot{\eta} + M(q)\dot{S}(q)\ddot{\eta} \right] \quad (3.73)$$

Note : dans tout ce qui précède, nous avons toujours spécifié que le vecteur des efforts roues-sol dépendait uniquement de q et de \dot{q} . Dans (3.73), le vecteur λ , appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange, relié à $F(q, \dot{q})$ par (3.72), est par sa part exprimé en

fonction de q , η et $\dot{\eta}$. La fonction λ a été exprimée ainsi uniquement pour des commodités d'écriture, le modèle (2.51) permettraient, si besoin était, d'exprimer λ uniquement en fonction de q et \dot{q} .

Lorsque l'on se place sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, on n'utilise pas les modélisations proposées à la section 3.1 pour les efforts de contact roues-sol, on se contente d'utiliser l'expression (3.72), très simple. Il est néanmoins intéressant de regarder comment l'expression (3.72) peut être reliée aux différents modèles des efforts roues-sol proposés à la section 3.1. Les hypothèses de roulement pur sans glissement s'expriment comme : *la vitesse des points du robot en contact avec le sol est nulle*, ce qui peut être traduit par les relations (3.2) et (3.3), ou encore, en utilisant les Définitions 3.3 et 3.1, comme :

$$\begin{cases} g = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

Aussi, en reportant (3.74) dans (3.12) et (3.19), on voit clairement que le cas particulier roulement pur sans glissement peut s'obtenir depuis le cas général où des glissements et des dérivés sont présents, en considérant que les constantes D_x et D_y , qui paramètrent le cas avec glissement, sont infinies. En reportant maintenant (3.74) dans (3.63) et (3.64), on voit que de la même façon, le cas roulement pur sans glissement correspond à des rigidités de glissement G et de dérive D infinies.

Les hypothèses de roulement pur sans glissement peuvent être vues comme un déplacement du robot sur un sol très particulier dont les propriétés seraient : les rigidités de glissement G et de dérive D sont infinies.

A l'inverse, dans le cas roulement pur sans glissement, le couple d'auto-alignement C_a est toujours nul (puisque le plan de la roue et le vecteur vitesse linéaire de la roue sont à chaque instant alignés). Par conséquent, au vu de (3.23) ou (3.21), il n'y a cette fois aucune contrainte sur les constantes D_c ou Q quand on passe du cas avec glissement et dérive au cas roulement pur sans glissement.

Les considérations précédentes permettent de proposer une définition cohérente pour la variable ε qui apparaît dans le modèle générique (3.77) de robot mobile introduit dans [ACB95b]. Au vu de (3.76), ε mesure l'écart entre les conditions réelles du mouvement et les hypothèses de roulement pur sans glissement. Une indication précise sur les conditions du mouvement est fournie par les rigidités de glissement G_i et de dérive D_i de chacune des roues. Donc il apparaîtrait tout à fait normal de relier ε à ces grandeurs. En utilisant ce que nous venons de voir, il apparaît très logique de définir ε comme suit :

$$\varepsilon = \min \left(\min_i \frac{1}{G_i}, \min_i \frac{1}{D_i} \right) \quad i \in [1, n] \quad (3.75)$$

En effet, lorsque l'on se trouve sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, d'après ce qui vient d'être dit, les rigidités de glissement G_i et de dérive D_i de chacune des roues sont infinies, donc nous obtenons, comme attendu, $\varepsilon = 0$. L'équation (3.75) est la définition proposée dans [ACB95b] pour ε .

3.2 Modèles de robots mobiles

La description des forces de contact pneumatique-sol est la tâche la plus difficile dans la modélisation d'un robot mobile. Différentes solutions possibles à ce problème ont été apportées à la section 3.1. A partir de là, l'obtention d'un modèle de robot mobile ne pose plus aucune difficulté : la très grande majorité des auteurs a dérivé un modèle à partir de la *Relation Fondamentale de la Dynamique* (notée RFD dans la suite), les autres se sont tournés vers les *équations d'Euler-Lagrange*. Les différents modèles ainsi obtenus sont passés en revue dans cette section.

3.2.1 Perturbation singulière du modèle générique

Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, on pouvait se dispenser de la connaissance explicite des forces de contact roues-sol. Cela n'est malheureusement plus possible dans le cas où il y a glissement, comme le montrent les calculs suivants, tirés de [ACB95b] : s'il y a glissement, les contraintes données par la Proposition 2.12 est violée, par conséquent \dot{q} n'est plus donné par (2.48), il peut maintenant varier dans l'espace complet de dimension n . De part la relation liant les matrices $A(q)$ et $S(q)$, $A(q)\mu(t)$ est orthogonal à $S(q)\eta(t)$, pour toutes fonctions $\eta(t)$ et $\mu(t)$. Par conséquent, on peut écrire

$$\dot{q} = \dot{S}(q)\eta(t) + \varepsilon A(q)\mu(t) \quad (3.76)$$

L'avantage de cette écriture est que le terme $\varepsilon A(q)\mu(t)$ peut être interprété comme une mesure de la violation des contraintes. En jouant sur ε , il est possible d'utiliser des techniques de perturbations singulières pour estimer la robustesse des lois de commande basées sur un modèle de roulement pur sans glissement (voir [ACB95b]).

En reportant (3.76) dans (2.45), on obtient désormais comme modèle

$$\begin{cases} \dot{q} &= [\dot{S}, A] \begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \varepsilon \dot{\mu} \end{pmatrix} &= ([\dot{S}, A]^T M[\dot{S}, A])^{-1} [\dot{S}, A]^T \left[(C + F + Bu) - M[\dot{S}, \dot{A}] \begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon \mu \end{pmatrix} \right] \end{cases} \quad (3.77)$$

Puisque $F(q, \dot{q})$ est désormais prémultiplié par $([\dot{S}, A]^T M[\dot{S}, A])^{-1} [\dot{S}, A]^T$ qui est inversible, il n'est plus possible de le faire disparaître.

Il va donc falloir, dans le cas d'un roulement avec glissement, calculer explicitement les forces de contact roues-sol

Le modèle (3.77) est donc un modèle générique de robot mobile, dans le sens qu'il permet de décrire le comportement de n'importe quel robot mobile, et relativement facile à bâtir, puisqu'il suffit d'identifier la classe à laquelle appartient le robot pour connaître immédiatement les matrices $A(q)$ et $\dot{S}(q)$. Les autres éléments du modèle (3.77) : $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et B , qui correspondent respectivement à la matrice d'inertie du robot, aux efforts centrifuges et de Coriolis attachés au robot, et à la table d'action des actionneurs sont des données du problème de modélisation et donc sont connus. Quant à $F(q, \dot{q})$, qui correspond aux efforts de contact roues-sol, son expression peut être dérivée de la section 3.1

Dans [ACB95b], les auteurs se sont placés dans le cas où le glissement g et la dérive δ restent dans leur zone respectivement de pseudo-glissement et de pseudo-dérive. Les réactions longitudinale F_x et transversale F_y sont donc représentées par un modèle linéaire et découplé du type (3.63)-(3.64). En fait, le modèle retenu dans [ACB95b] est encore légèrement plus simple, puisque la définition retenue pour g n'est pas la Définition 3.1 mais l'approximation (3.8), elle-même simplifiée en remplaçant au dénominateur V_x par V , c'est-à-dire g est défini par

$$g = \frac{\dot{\varphi} - \frac{V_y}{R}}{\frac{|V|}{R}} \quad (3.78)$$

Comme les auteurs ont fait l'hypothèse que g reste toujours très petit, l'erreur entre la Définition 3.1 et (3.78) est faible (puisque dans ce cas $\frac{V_y}{R} \approx \dot{\varphi}$ et $V_x \approx V$). Une approximation identique a été faite pour la variable de dérive δ , définie non par (3.14) mais par

$$\delta = \frac{V_y}{|V|} \quad (3.79)$$

Les définitions approchées (3.78) et (3.79) de g et δ ont été faites par les auteurs de [ACB95b] uniquement dans le but de simplifier l'expression finale du vecteur des forces généralisés représentant les forces de contact pneumatique-sol. Les définitions classiques (3.5) et (3.14) respectivement pour g et δ auraient tout à fait pu être utilisées, l'écriture finale de la force aurait juste été un peu plus lourde.

Enfin, le couple d'auto-alignement C_a a été négligé, approximation très courante dans la littérature.

En utilisant les expressions (3.78) et (3.79), le modèle linéaire et découplé des efforts du sol sur la roue i du robot peut être écrit sous la forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \end{pmatrix} = \frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\dot{\varphi}_i - V_{x,i} \\ V_{y,i} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

Le terme $(R\dot{\varphi}_i - V_{x,i}, V_{y,i})^T$, qui apparaît dans l'équation ci-dessus n'est en fait rien d'autre que la vitesse linéaire $\vec{V}_{T,i}$ du point de contact de la roue i avec le sol. Soit $T_i(q)$ la matrice exprimant $\vec{V}_{T,i}$ en fonction de \dot{q} :

$$\vec{V}_{T,i} = T_i^T(q)\dot{q} \quad (3.81)$$

et $L_i(q)$ la matrice donnée par :

$$L_i(q)A^T(q) = T_i^T(q) \quad (3.82)$$

En utilisant (3.81) et (3.82), la relation (3.80) peut encore s'écrire

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \end{pmatrix} = \frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} L_i(q)A^T(q)\dot{q} \quad (3.83)$$

La méthode de modélisation retenue dans [ACB95b] est le formalisme d'Euler-Lagrange. Le vecteur $F(q, \dot{q})$ qui représente dans (3.77) les forces de contact roue-sol n'est pas directement la somme des vecteurs $(F_{x,i}, F_{y,i})^T$ tel que donnés dans (3.83), mais la somme des forces généralisées associées à chacun des vecteurs $(F_{x,i}, F_{y,i})^T$. La force généralisée

associée au vecteur $(F_{x,i}, F_{y,i})^T$ est définie comme suit la puissance de la force $(F_{x,i}, F_{y,i})^T$ donnée par (3.83) est

$$W_i = (F_{x,i}, F_{y,i})^T V_i^c = (F_{x,i}, F_{y,i})^T L_i(q) A^T(q) \dot{q} \quad (3.84)$$

La contribution de $(F_{x,i}, F_{y,i})^T$ à la force généralisée $F(q, \dot{q})$, notée $F_i(q, \dot{q})$, est définie par

$$W_i = F_i(q, \dot{q})^T \dot{q} \quad (3.85)$$

En regroupant (3.84), (3.85) et (3.83), on en déduit que

$$F_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{|V|} A(q) L_i^T(q) \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} L_i(q) A^T(q) \dot{q} \quad (3.86)$$

La force généralisée $F(q, \dot{q})$ qui apparaît dans le modèle générique (3.77) est alors simplement la somme des vecteurs $F_i(q, \dot{q})$ associés à chaque roue.

Le modèle (3.77) apparaît comme très pertinent, vu qu'il a été bâti comme une *perturbation* du modèle générique (2.51) utilisé sous les hypothèses de roulement pur sans glissement. En effet, tous les termes qui ont été ajoutés dans (3.77) par rapport à (2.51) sont prémultipliés par la constante ε , supposée petite (le modèle (2.51) se retrouve ainsi en faisant simplement $\varepsilon = 0$ dans (3.77)). Le fait que le modèle (3.77) soit une perturbation du modèle écrit sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, va permettre de tester la robustesse, vis à vis des glissements, des très nombreuses lois de commande écrites pour le cas roulement pur sans glissement, ce qui n'avait pas été fait jusqu'alors.

A titre d'exemples, et de manière à pouvoir réaliser des simulations numériques, le modèle générique (3.77) a été particularisé, dans [ACB95b] et [Ren93], au cas d'un robot à 2 roues fixes, montées sur un même axe, et motorisées indépendamment (plus une roue folle) (voir Figure 3.16), et dans [Ren93], au cas d'un robot tricycle, c'est-à-dire un robot à 2 roues fixes montées sur le même axe mais non motorisées, et d'une roue directrice placée en avant des 2 roues fixes (voir Figure 3.17).

3.2.2 Description des principaux robots mobiles étudiés dans la littérature et des motivations des auteurs

Dans la plupart des articles publiés dans la littérature, un robot mobile bien précis a été considéré. Les propriétés particulières du système étudié et/ou les conditions particulières d'utilisation de ce système peuvent alors être prises en compte, et un modèle plus simple que le modèle (3.77) peut être dérivé. Dans cette section, nous présentons les modèles proposés dans la littérature pour différents types de robots mobiles

Les robots mobiles étudiés dans la littérature peuvent être rangés en 3 catégories

le *chariot*, représenté sur la Figure 3.16. Il est équipé de 2 roues fixes, montées sur un même axe, mais commandées indépendamment l'une de l'autre, de façon à pouvoir diriger le robot. Une troisième roue, montée folle (non représentée sur la Figure 3.16), permet au robot d'être stable. Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (Hypothèses 2.2), ce robot appartient à la classe \mathcal{R}_0^2 .

le *tricycle*, représenté sur la Figure 3.17. Les 2 roues arrière sont, comme dans le cas du chariot, fixes et montées sur le même axe, mais elles ne sont plus motorisées. La propulsion et la direction du tricycle sont assurées exclusivement par la roue avant, motrice et directrice. Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (Hypothèses 2.2), ce robot appartient à la classe \mathcal{R}_1^1 .

la *voiture*, représentée sur la Figure 3.18. Ce système correspond classiquement à un véhicule routier à 4 roues directrices : toutes les roues sont orientables, avec la restriction toutefois que l'orientation des 2 roues avant d'une part, et des 2 roues arrière d'autre part, est toujours identique. Quant à la motricité du véhicule, elle est assurée exclusivement par les 2 roues avant. Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (Hypothèses 2.2), ce robot appartient à la classe \mathcal{R}_2^1 .

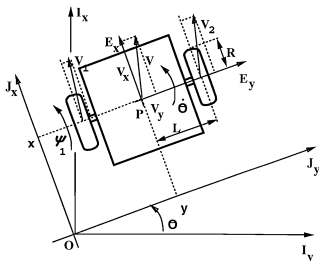


Figure 3.16: Robot à 2 roues fixes, montées sur un même axe, et motorisées indépendamment

Le chariot, représenté sur la Figure 3.16, avait fait l'objet de très nombreux articles dans la littérature consacrée à la commande des robots mobiles sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (voir par exemple [Pom92], [CA92], [SA91], [MS94], [CS92], [MWS92] et d'autres articles des mêmes auteurs, [ACB95b]), et ce, en raison de la simplicité de ses équations. De façon à prolonger ces travaux, il apparaît relativement logique de l'étudier de nouveau lorsque l'on aborde le cas roulement avec glissement.

C'est dans cette optique que se situent l'article [ACB95b] et les rapports [Sac93] et [Ren93]. Par exemple, les 2 types de modèles généralement considérés dans la littérature

sur la commande des robots mobiles sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (i.e. *modèle cinématique* - les commandes du modèle sont les vitesses de rotation des roues et *modèle dynamique* - les commandes du modèle sont les commandes réelles, c'est-à-dire les couples appliqués à chacune des roues -) sont successivement étudiés dans [Sac93]. C'est le seul rapport, à notre connaissance, où les 2 types de modèles sont encore dérivés. Dans tous les autres articles et rapports, vu que prendre en compte les glissements signifie que l'on cherche à se rapprocher de la réalité, le modèle cinématique est laissé de côté au profit du modèle réel, c'est-à-dire du modèle dynamique.

La modélisation du chariot, dans [Sac93] comme dans [Ren93], est légèrement simplifiée - seules les forces de contact liées aux 2 roues fixes sont prises en compte pour calculer la dynamique générale du système. Les auteurs, dans leur démarche de modélisation, font comme si la roue folle n'existait pas. Ce parti pris se justifie en considérant toujours le cas roulement pur sans glissement. En effet, si l'on suppose que ces hypothèses sont vérifiées, la roue folle n'a aucune influence sur la cinématique du robot étant donné une configuration des roues fixes, il n'y a qu'une et une seule configuration de la roue folle qui permette au chariot de bouger en accord avec les hypothèses de roulement pur sans glissement. Par conséquent, le mouvement du chariot est complètement déterminé par la seule donnée de la configuration des roues fixes. Ce résultat n'est pas propre au chariot - de manière générale, sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, les roues folles n'influencent pas le mouvement du robot (voir par exemple [CBA93]). On a donc parfaitement le droit, dans le cas sans glissement, de les négliger lorsque l'on construit le modèle d'un robot. Cela n'est plus exact lorsque les hypothèses de roulement pur sans glissement sont relâchées. Si on admet que la roue folle peut déraeper, il n'y a plus aucune contrainte sur sa configuration. Suivant cette dernière, la roue folle dérapera plus ou moins, et de manière évidente, cela influera sur le mouvement du robot. Si l'on veut être exact, il faudrait donc prendre en compte la roue folle. Dans [ACB95b], une modélisation du chariot est donnée à la fin de l'article en guise d'exemple pour l'utilisation du modèle générique, et la roue folle est effectivement prise en compte. Néanmoins, dans [Sac93] et [Ren93], les auteurs se placent dans le cas où glissements et dérivés sont faibles, l'erreur commise en négligeant la roue folle sera donc faible. Par conséquent, au vu des simplifications que cela apporte au modèle final du chariot, négliger la roue folle est une hypothèse "rentable"

Le *tricycle*, représenté sur la Figure 3.17, est un système d'une complexité intermédiaire entre le chariot et la voiture. Le premier système a été très étudié en raison de la simplicité de ses équations, le second, en raison d'un évident intérêt pratique, ce qui fait que le *tricycle* a finalement été peu traité dans la littérature. Un modèle du *tricycle*, dans le cas où les glissements et les dérivés sont pris en compte peut être trouvé dans [Ren93]. Il s'agit cependant uniquement de la particularisation du modèle générique proposé dans [ACB95b] au cas du *tricycle*, de façon à avoir un exemple illustratif autre que le chariot.

La *voiture* est de loin le système le plus souvent considéré dans la littérature traitant de la commande des robots mobiles en présence de glissement. Cela semble très naturel. Les véhicules de type chariot sont généralement conçus pour intervenir dans des milieux très structurés (intérieur d'une usine par exemple), et sans contrainte excessive sur la

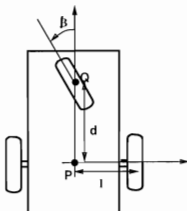


Figure 3.17: Robot mobile de type tricycle

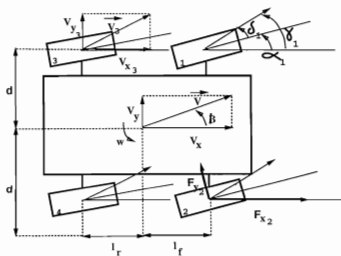


Figure 3.18: Robot mobile de type voiture, à 4 roues directrices

vitesse. Dans ces conditions, les hypothèses de roulement pur sans glissement peuvent passer pour raisonnables. A contrario, les systèmes de type voiture sont clairement conçus pour se déplacer très rapidement en milieux extérieurs (et donc non parfaits). Il était donc logique, pour ne pas dire obligatoire, de prendre en compte les glissements et dérivés dans leur modèle.

De plus en plus d'auteurs s'intéressent aujourd'hui aux véhicules à 4 roues directrices, (en fait par 4 roues directrices, il faut entendre 4 roues orientables 2 par 2 : l'orientation des roues avant est identique, de même pour celle des 2 roues arrière. Le cas où l'orientation de chacune des 4 roues serait indépendante des autres n'a, à notre connaissance, été traité que sous les hypothèses de roulement pur sans glissement (voir [TAM95b])). Les véhicules à 4 roues directrices, comparativement aux véhicules à 2 roues directrices, sont, comme souligné dans [Ack93] :

beaucoup plus sûrs à haute et moyenne vitesse — par exemple, dans le cas d'un changement de voie sur autoroute, lorsque l'on dispose de 2 roues arrière directrices, on peut commander leur orientation dans le même sens que l'orientation des roues avant, et il semble intuitif que, grâce à cela, le châssis du véhicule restera beaucoup plus parallèle à la chaussée que lorsque seule l'orientation des roues avant était commandée.

beaucoup plus agréables : par exemple, dans le cas d'un créneau, lorsque l'on dispose de 2 roues arrière directrices, on peut commander leur orientation dans le sens opposé de celle des roues avant, ce qui augmente immédiatement le rayon de braquage du véhicule.

Jusqu'à ces dernières années, les véhicules 4 roues motrices étaient peu répandus, on les trouvait presque exclusivement dans le domaine des véhicules tout terrain. Cela est peu à peu en train de changer, les véhicules routiers haut de gamme commencent à être équipés eux-aussi de 4 roues directrices. La recherche sur la commande des systèmes à 4 roues directrices est cependant loin d'être achevée, comme en témoignent les nombreux articles parus dans la littérature ces dernières années.

Si l'on s'en réfère aux buts et motivations des auteurs, il est possible de ranger les différents articles publiés en 4 classes

C^I l'objectif des auteurs est de bâtir le modèle le plus exact possible, soit à des fins de simulation, pour valider les lois de commande proposées (test de robustesse notamment), soit pour développer des lois de commandes "haut niveau" (type commande hiérarchisée, floue ou par réseau de neurones).

C^{II} l'objectif des auteurs est de construire des lois de commande type retour d'état pour contrôler le déplacement horizontal du véhicule, i.e. contrôler la position et l'orientation du véhicule. Ignorer le déplacement vertical du véhicule (i.e. roulis, tangage, oscillations verticales induites par les suspensions, le carrossage, les irrégularités du sol...) permet de simplifier grandement le modèle d'une voiture, et facilite donc la synthèse d'une loi boucle fermée type retour d'état. Sous couvert que le sol est globalement horizontal et homogène, et que la vitesse du véhicule n'est

pas excessive en regard des trajectoires suivies (pas de courbes importantes prises très vite), les lois synthétisées sur le modèle horizontal seront réalistes.

- C^{III}* *l'objectif des auteurs est de construire des lois de commande type retour d'état pour contrôler le mouvement longitudinal du véhicule.* C'est une restriction du problème précédent. L'une des commandes du véhicule, précisément l'orientation des roues, est fixée : on aligne les roues avec la direction longitudinale du véhicule, et le problème posé est de contrôler, à l'aide de la commande accélérateur-frein, la vitesse et/ou la position du véhicule le long de la droite qu'il est contraint de décrire.
- C^{IV}* *l'objectif des auteurs est de construire des lois de commande type retour d'état pour contrôler le mouvement latéral du véhicule.* C'est le problème inverse du précédent. La commande accélérateur-frein est fixée à zéro (i.e. on se place à vitesse constante), et le problème posé est de faire rattraper et suivre au véhicule une trajectoire donnée (problème du changement de voie sur une autoroute par exemple), en contrôlant uniquement l'orientation des roues.

Le mouvement longitudinal et le mouvement latéral d'une voiture ne sont pas, bien évidemment, complètement découplés : la commande accélérateur-frein n'agit pas exclusivement sur le déplacement longitudinal du véhicule, de même que la commande orientation des roues n'agit pas exclusivement sur le mouvement latéral. Chacune des commandes agit à la fois longitudinalement et latéralement. On ne peut donc espérer commander une voiture en réunissant une loi proposée dans la classe *C^{III}* et une loi proposée dans la classe *C^{IV}*. Cela ne serait à la limite possible que si les plages de variation de la vitesse longitudinale et des orientations des roues directrices étaient très étroites. En effet, on peut montrer facilement, voir par exemple [All94], que si on linéarise les équations d'une voiture autour d'une vitesse donnée et d'une orientation des roues nulles, alors, et seulement dans ce cas, il y a découplage entre les mouvements longitudinaux et latéraux. Mais pratiquement, la vitesse d'une voiture varie constamment et l'on exploite les possibilités d'orientation des roues directrices au maximum. Les travaux présentés par les auteurs des classes *C^{III}* et *C^{IV}* sont cependant très intéressants, soit comme première étape vers la commande globale d'une voiture, soit comme algorithme de régulation local, inscrit dans un schéma de commande hiérarchisé.

Les articles [Ack93] [Lee92] [MCH91] et [MT92] appartiennent à la classe C^{IV}

Dans les 3 premiers articles, le modèle de la voiture a été construit sur la base des hypothèses suivantes : en première approximation, on peut considérer que le système voiture, représenté sur la Figure 3.18, est équivalent au système représenté sur la Figure 3.19, c'est-à-dire à un système où (voir Figure 3.19)

les 2 roues avant auraient été concentrées en une seule roue, placée au centre G_f de l'axe des roues avant (centre géométrique de l'essieu mais aussi centre de masse pour peu que les 2 pneumatiques soient à la même pression), et soumise à une réaction du sol double de celle appliquée dans la réalité à chacune des roues avant (de façon à ne pas fausser le bilan des forces dans la RFD).

les 2 roues arrière auraient été concentrées en une seule roue, placée au centre G_r de l'axe des roues arrière (de la même façon centre géométrique et centre de masse),

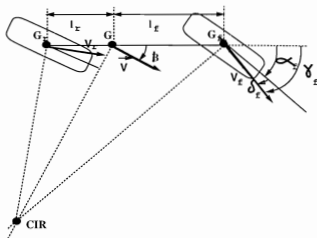


Figure 3.19: Schéma simplifié d'un robot mobile à 4 roues directrices

et soumise à une réaction du sol *double* de celle appliquée dans la réalité à chacune des roues arrière (de façon à ne pas fausser le bilan des forces dans la RFD).

l'hypothèse est faite que le système simplifié ainsi obtenu est, en dépit de 2 points de contact seulement avec le sol, parfaitement stable.

Sachant que l'objectif des auteurs est uniquement de commander le mouvement latéral de la voiture, ce système simplifié sera tout à fait satisfaisant, pour peu que

la vitesse de rotation ω du véhicule ne soit jamais très élevée. En effet, les vecteurs vitesse du centre des 2 roues avant et du point G_f sont (avec la numérotation des roues et les notations de la Figure 3.18)

$$\begin{array}{ll} \text{roue 1} & \vec{V}_1 = (V_x - d\omega, V_y + l_f\omega) \\ \text{point } G_f & \vec{V}_{G_f} = (V_x, V_y + l_f\omega) \\ \text{roue 2} & \vec{V}_2 = (V_x + d\omega, V_y + l_f\omega) \end{array}$$

et si ω est tel que le produit $d\omega \ll V_x$, les vitesses des roues 1 et 2 et du point G_f peuvent être confondues. Le glissement de la roue fictive, placée en G_f sera alors quasiment égal à celui des roues 1 et 2 (cf. Définition 3.1). Puisque que nous avons supposé que l'angle de braquage des 2 roues avant était identique ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_f$), nous aurons la même propriété pour la variable de dérive, et par conséquent, la force de réaction sol sur roue $\vec{F}(g, \delta)$ appliquée sur la roue fictive sera réaliste, et pourra être utilisée dans la RFD.

le sol soit homogène, de sorte que les conditions de contact pneumatique-sol soient les mêmes sur les roues droites et gauches.

les couples appliqués respectivement aux 2 roues avant et aux 2 roues arrière soient à peu près les mêmes (puisque l'on remplace 2 roues par une seule, on ne peut plus modéliser un différentiel).

Ces conditions ne sont pas trop irréalistes, donc le système simplifié à 2 roues est bien une très bonne approximation des systèmes de type voiture, dans le cas bien sûr où l'objectif est de commander uniquement le mouvement latéral du véhicule.

Pour être précis, le système étudié dans [MCH91] n'est pas exactement le système décrit sur la Figure 3.19. En effet, ce système est une idéalisation de robot mobile, dans le sens que c'est un robot qui n'a aucune réalité physique (il n'aurait que 2 points de contact avec le sol, et donc ne serait pas stable). Dans [MCH91], les auteurs proposent de raisonner sur un système très légèrement différent, mais qui lui est réaliste : le système modélisé et étudié dans [MCH91] est le système représenté sur la Figure 3.19 auquel ont été adjointes, sur l'axe perpendiculaire à $(G_I G_r)$ passant par G , 2 roues folles dont les centres, notés G_d et G_s , vérifient $\|GG_d\| = \|GG_s\| = d$. Un tel système possède 4 points de contact avec le sol et est donc parfaitement stable. Les roues folles influençant peu la dynamique générale du véhicule, ce dernier système aura un comportement très voisin de celui représenté sur la Figure 3.19, et par transitivité, très voisin d'un véhicule à 4 roues directrices. C'est pour cette raison que nous avons placé l'article [MCH91], pour ce qui est de la modélisation, exactement sur le même plan que les articles [Ack93] et [Lee92]. Les auteurs, dans [MCH91], avaient en définitive juste voulu travailler sur un robot qui présentait le double avantage d'approximer le robot de type voiture et d'être réaliste.

Dans [MT92], les auteurs avaient aussi pour objectif de commander le mouvement latéral d'un robot de type voiture. Toutefois, l'une des commandes qu'ils veulent utiliser est la différence entre le couple appliqué sur la roue avant droite et celui appliqué sur la roue avant gauche. Cette commande, peu utilisée d'ordinaire (du reste, ils montrent dans leur article que cette commande est bien moins pertinente que la commande en orientation des roues arrière), n'apparaît plus dans le modèle simplifié décrit par la Figure 3.19. Le modèle qu'ils proposent pour la voiture est donc un peu plus complexe que celui présenté dans les 3 articles précédents, il est construit en raisonnant directement sur la Figure 3.18.

Pour le reste, les hypothèses de modélisation sont globalement les mêmes dans les 4 articles. L'article [Lee92] se distingue juste un peu des autres par le choix de ses variables de commande et de sortie. Dans [Ack93] [MCH91] et [MT92], les variables de commande sont directement les orientations des roues directrices, alors que dans [Lee92] les variables de commande sont les orientations souhaitées des roues directrices, reliées aux orientations effectives via un système du premier ordre, modélisant les inerties du système d'orientation des roues. De même, dans [Ack93] [MCH91] et [MT92], les variables de sortie sont la vitesse latérale et la vitesse de rotation de la voiture, alors que dans [Lee92] c'est l'écart latéral et angulaire du véhicule par rapport à la trajectoire qu'il lui est proposé de suivre.

L'article [TC91], rentre dans la classe C^{III} , c'est-à-dire s'intéresse au contrôle du mouvement longitudinal d'une voiture. Plus précisément, le but des auteurs est de développer une commande pour le déplacement longitudinal du véhicule, qui garantisse intrinsèquement que la variable de glissement g (Définition 3.1) reste, tout au long du déplacement, dans la zone de pseudo-glissement, et ce pour des raisons évidentes de sécurité. Dit autrement, le problème est de réaliser un système ABS-ASR, uniquement à base de logiciel, sans plus aucun élément mécanique.

Une fois encore, au vu du problème posé, la modélisation d'une voiture peut être très significativement simplifiée. Comme première étape, les auteurs se sont placés dans le cas où

la commande d'orientation des roues n'est pas utilisée. On suppose donc que la voiture suit une trajectoire rectiligne.

le sol est homogène (i.e. les conditions de contact roues-sol sont les mêmes pour les 4 roues).

Dans ces conditions, les 4 roues ont strictement même vitesse et donc strictement même glissement g . Par conséquent, dans ce cas particulier, la voiture est équivalente à un système mobile à 1 roue qui serait parfaitement stable, et ce, en dépit d'un seul point de contact avec le sol. C'est un tel modèle qui est construit et exploité dans [TC91].

Le problème de la classe C^{II} , i.e. la commande du déplacement total (i.e. longitudinal et transversal) d'une voiture pourrait très certainement être abordé en utilisant le modèle simplifié décrit à la Figure 3.19. Cependant, parmi les articles et rapports que nous avons lu, ce problème n'a été abordé que dans [All94], avec comme modèle pour la voiture, un modèle non-simplifié, du même type que celui présenté dans [MT92] (qui avait été construit en raisonnant directement sur la Figure 3.18), mais calculé ici par simplification d'un modèle complet (modélisant les déplacements horizontaux et verticaux) de la voiture.

Les modèles complets (classe C^I), qui modélisent la dynamique horizontale et verticale d'une voiture, sont excessivement compliqués. Ils sont en général construits dans le but soit de développer des commandes "haut niveau" (commandes hiérarchisées, floues ou réseaux de neurones - références dans [All94]-), soit de fabriquer un simulateur : simulateur VERI dans [Tr 92] (outil d'aide et de test pour le développement d'un véhicule tout terrain autonome CEA), simulateurs ProLab I et ProLab II dans [All94] (outil de test pour un système d'aide à la conduite Projet PROMETHEUS), simulateurs développés par les grands constructeurs automobiles (références dans [All94]). Dans ces modèles, des degrés de liberté autres que ceux liés à la mobilité du véhicule sont pris en compte, à commencer par ceux liés aux suspensions. Ces degrés de liberté revêtent une grande importance, notamment dans le domaine de la sécurité du véhicule : par exemple, si une voiture aborde trop vite un virage, l'existence de suspensions va conduire à un angle de roulis important (la voiture penche du côté extérieur au virage), ce qui risque de faire partir la voiture en tonneaux. Il est donc tout à fait normal que les constructeurs et les équipementiers

automobiles aient construit des modèles très complets, qui rendent compte de tous les degrés de liberté d'un véhicule.

Ces modèles sortent cependant du cadre de notre étude. Ce rapport se veut être une étude bibliographique sur la modélisation de robots mobiles dans le cas où les hypothèses de roulement pur sans glissement sont relâchées, avec dans l'idée de développer et/ou de tester la robustesse de lois de commande calculées pour ces systèmes. Les modèles complets, sont très précis, mais beaucoup trop complexes à utiliser pour la synthèse de lois de commande. Ainsi, dans [All94], le modèle complet n'est pas utilisé pour construire les lois de commande. Celles-ci ont été bâties sur une version du modèle complet dont on a expurgé tout ce qui a rapport au déplacement vertical du véhicule. Par conséquent, dans ce présent rapport, nous ne nous préoccupons pas des modèles complets, nous présenterons juste très brièvement, à la fin de cette section, les degrés de liberté à considérer pour affiner nos modèles.

3.2.3 Description des contacts roues-sol

Couple d'auto-alignement \vec{C}_a

Dans tous les articles mentionnés ci-dessus, le couple d'auto-alignement est toujours négligé.

Réaction longitudinale F_x

Quand l'objectif de l'article est de réguler la dynamique latérale d'un robot se déplaçant à vitesse constante, la réaction longitudinale F_x n'est généralement pas mentionnée. C'est notamment le cas dans [Ack93], [Lee92]. Cela est tout à fait logique sachant que les auteurs font les hypothèses suivantes :

le sol sur lequel se déplace le robot est parfaitement homogène (les conditions de contact sont les mêmes partout),

les forces de frottement des roues sur le sol sont négligées,

le robot se déplace à vitesse V constante.

$$V_y \ll V_x$$

Dans ces conditions, $V_x \approx V$, et donc V_x est quasiment constant lui-aussi. Le système étudié ne présente donc quasiment pas d'accélération longitudinale, et l'absence de frottement permet de conclure que toutes les réactions longitudinales F_x associées à chaque roue sont bien négligeables.

Dans [MCH91], le problème de commande est le même; cependant les réactions longitudinales F_x sont mentionnées. Cela tient au fait que cette fois, les forces de frottement des roues sur le sol ne sont plus négligées. Afin d'être dans le cas vitesse constante, les forces de frottement doivent être compensées. C'est uniquement pour cette raison technique que sont introduites les réactions longitudinales F_x . Elles sont prises arbitrairement constantes, et aucun détail n'est donné sur la façon de les modéliser (il n'est donné aucune

indication sur la façon de calculer F_x en fonction de la vitesse de la roue et du couple qui lui est appliqué).

L'objectif des auteurs dans [MT92] est aussi de réguler la dynamique latérale d'un robot se déplaçant à vitesse constante. L'une des commandes qu'ils souhaitent utiliser étant, comme cela a déjà été mentionné, la différence entre le couple appliqué sur la roue avant droite et celui appliqué sur la roue avant gauche; les auteurs cette fois devaient nécessairement prendre en compte les réactions longitudinales. Dans [TC91], où l'objectif est de contrôler la dynamique longitudinale du robot, et dans [Sac93] et [Ren93] d'autre part, où l'objectif est de contrôler toute la dynamique horizontale du robot étudié, les réactions longitudinales sont bien évidemment modélisées.

Définition de la variable de glissement

dans [TC91] et [MT92], la définition choisie pour la variable de glissement g est exactement celle choisie ici (Définition 3.1).

dans [Ren93], l'objectif de l'auteur était d'appliquer sur 2 exemples, le chariot et le tricycle, le modèle générique (3.77) proposé dans [ACB95b]. Par conséquent, la définition retenue pour la variable de glissement g est l'expression (3.78) proposée dans [ACB95b] que nous avons déjà commentée à la section 3.2.1.

dans [Sac93], la première définition donnée est la Définition 3.1. Dans la suite du rapport [Sac93], comme l'auteur se place dans le cas où les glissements restent petits, il propose d'approximer la Définition 3.1 de g par (3.8). Si les glissements restent effectivement petits, nous avons $V_e \approx R\dot{\phi}$, et donc l'erreur sur la valeur de g est très faible. Cette approximation a été dictée par le fait que dans toute la première partie de son rapport, l'auteur considère $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$, vitesses angulaires des 2 roues motrices, comme des commandes. Si la Définition 3.1 de g avait été gardée telle quelle, l'auteur se serait retrouvé fréquemment avec une ou des variables de commande au dénominateur (dès que l'une ou l'autre des roues passait en phase d'accélération). Le fait que le modèle du robot mobile ne soit plus affine en les commandes aurait rendu le problème de la synthèse d'une loi de commande beaucoup plus ardu, et il est donc logique que l'auteur ait songé à modifier légèrement sa définition du glissement.

Expression de F_x

Dans [Ren93], l'expression linéaire découplée de F_x proposée dans [ACB95b] est reprise immédiatement (voir section 3.2.1). En revanche, dans les 3 autres articles, la première représentation utilisée pour F_x est une représentation non-linéaire.

Dans [TC91], la fonction $F_x(g)$ n'est pas donnée analytiquement, mais via une série de courbes, que nous avons du reste reportées dans ce rapport (Figure 3.6). L'allure de ces courbes est tout à fait en accord avec l'allure que nous avons donnée à la section 3.1 pour $F^{\text{SD}}(g)$ (dans [TC91], le robot est supposé se déplacer en ligne droite, les auteurs sont donc dans le cas glissement pur). Comme l'objectif des auteurs est de contrôler la

dynamique longitudinale du robot tout en garantissant que l'on ne sort pas de la zone de pseudo-glisement, ce modèle non-linéaire de F_x sera utilisé tout au long de l'article [TC91].

Dans [Sac93], la première expression proposée pour F_x est la fonction (3.12) que l'auteur a tirée comme nous de [BNP87]. L'existence d'un couplage longitudinal-transversal est évoqué, mais non détaillé. Cependant, cette expression non-linéaire de F_x ne sera pas utilisée pour la construction des lois de commande. L'auteur se place dans le cas où la variable de glissement g reste petite (i.e. tout au moins reste dans sa zone de pseudo-glisement) et, par le même raisonnement que celui que nous avons proposé à la section 3.1, montre que l'expression *linéaire et découplé* (3.63) décrit correctement l'effort longitudinal du sol sur le pneumatique. C'est cette expression qui sera utilisée dans toute la partie commande de [Sac93].

Dans [MT92], une allusion rapide est faite à la forme générale de F_x . Il est notamment donné des graphes similaires à la Figure 3.5. Mais dans le modèle du robot, exploité par la suite, la réaction longitudinale est modélisée par la forme *linéaire et découplée* (3.63), à ceci près que *les transferts de charge* sont pris en compte

Il a été dit à la section 3.1 qu'en première approche, on pouvait considérer que les réactions longitudinale F_x et transversale F_y dépendaient linéairement de la charge.

Au repos, les charges supportées par l'une des roues avant et par l'une des roues arrière sont respectivement données par (3.87) et (3.88)

$$F_{N, \text{repos}}^f = \frac{l_r}{2(l_f + l_r)} Mg \quad (3.87)$$

$$F_{N, \text{repos}}^r = \frac{l_f}{2(l_f + l_r)} Mg \quad (3.88)$$

où

M est la masse totale du véhicule,

g est l'accélération de la pesanteur,

l_f et l_r sont les distances entre le centre du véhicule et respectivement l'axe des roues avant et l'axe des roues arrière (voir Figure 3.18).

Quand le véhicule aborde une courbe, un transfert de charge se produit du côté qui est à l'intérieur du virage vers le côté qui est à l'extérieur du virage. Ce transfert de charge, à l'avant et à l'arrière, a respectivement pour amplitude (3.89) et (3.90) :

$$T_c^f = \frac{l_r}{2(l_f + l_r)} \frac{hF_c}{d} \quad (3.89)$$

$$T_c^r = \frac{l_f}{2(l_f + l_r)} \frac{hF_c}{d} \quad (3.90)$$

où

F_c est la force centripète qui agit sur le véhicule,

h est la hauteur du centre de masse par rapport au sol,

d est la demi-longueur de l'axe des roues (voir Figure 3.18).

La force centripète F_c est donnée par

$$F_c = M \frac{V^2}{\rho} \quad (3.91)$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire suivie, défini par

$$\rho(\omega + \dot{\beta}) = V \quad (3.92)$$

avec .

ω : vitesse angulaire du véhicule (voir Figure 3.18),

V : vitesse linéaire du véhicule (voir Figure 3.18),

β : angle entre \vec{V} et l'axe longitudinal du véhicule (voir Figure 3.18).

En reportant (3.92) dans (3.91), puis dans (3.89)-(3.90), et finalement dans (3.87)-(3.88), on obtient comme expression pour la charge supportée par chacune des roues, lorsque le véhicule décrit une courbe

$$\begin{aligned} F_{N,1} &= \frac{l_r}{2(l_f+l_r)} \left(Mg - \frac{hF_c}{d} \right); & F_{N,2} &= \frac{l_r}{2(l_f+l_r)} \left(Mg + \frac{hF_c}{d} \right). \\ F_{N,3} &= \frac{l_f}{2(l_f+l_r)} \left(Mg - \frac{hF_c}{d} \right); & F_{N,4} &= \frac{l_f}{2(l_f+l_r)} \left(Mg + \frac{hF_c}{d} \right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

où l'indice i de $F_{N,i}$ désigne le numéro de la roue, tel que défini sur la Figure 3.18.

L'expression retenue dans [MT92] pour modéliser la réaction longitudinale $F_{x,i}$ du sol sur la roue numéro i , est donc en définitive l'expression (3.11) où $F_{N,i}$ est donné par (3.93).

Réaction transversale F_y · Dans [TC91], les auteurs, comme cela a déjà été dit plus haut, envisagent uniquement le cas où le robot se déplace selon une ligne droite (le but de l'article est de proposer une loi de commande pour la dynamique longitudinale du véhicule). Dans ce cas de figure, l'angle de dérive δ et la réaction transversale F_y sont constamment nuls tout au long du mouvement du robot, par conséquent aucun modèle n'est proposé pour F_y dans [TC91]. Dans tous les autres articles mentionnés ci-dessus en revanche, F_y est modélisée et exploitée.

Définition de la variable de dérive

Dans tous les articles, la variable de dérive δ d'une roue est toujours initialement définie comme étant l'angle entre le vecteur vitesse linéaire de la roue et le plan de celle-ci, c'est-à-dire la Définition 3.3 donnée à la section 3.1.2. Cependant, comme tous les auteurs se placent dans le cas où δ reste petit (i.e. le système reste dans la zone de pseudo-dérive), l'expression non-linéaire (3.14) de δ est approximée

soit par .

$$\delta = \frac{V_y}{|V_x|}$$

i.e. on identifie la fonction *arctan* avec l'identité. C'est le cas dans [Sac93] et [MCH91],

soit par

$$\delta = \frac{V_y}{|V|}$$

i.e. on identifie la fonction *arctan* avec l'identité, et suppose que $V_x \approx V$. C'est le cas dans [Ren93], [MT92], [Lee92] et [Ack93].

Expression de F_y

Comme tous les auteurs se placent dans le cas où la dérive δ reste faible, l'expression utilisée en pratique pour F_y est l'expression *linéaire et découplée* (3.64).

Dans [Sac93], la modélisation non-linéaire de F_y (3.12), que l'auteur a tirée de [BNP87], et le couplage longitudinal-transversal sont évoqués, de la même manière que cela avait été fait au moment de la description de F_x . Mais, au moment d'écrire le modèle du robot et de l'utiliser pour calculer des lois de commandes, l'auteur montre, par le même raisonnement que celui que nous avons proposé à la section 3.1, que l'expression *linéaire et découplée* (3.64) décrit correctement l'effort transversal du sol sur le pneumatique, et c'est cette expression qui est finalement utilisée.

De la même façon, dans [MT92], une allusion rapide est faite à la forme générale de F_y , des graphes similaires à la Figure 3.9 sont donnés, mais le modèle exploité dans la pratique est la forme *linéaire et découplée* (3.64), à ceci près que, comme pour F_x , les *transferts de charge* sont pris en compte, c'est-à-dire que la rigidité de dérive D est donnée via (3.18) et (3.93).

Dans [Ack93] F_y est initialement modélisée par un développement en série, où ne figure que les puissances impaires de δ (étant donné que $F_y(\delta)$ est anti-symétrique par rapport à 0) :

$$F_y(\delta) = D\delta + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta^k \quad (3.94)$$

(avec D_k des coefficients constants). L'auteur reste assez vague quant à cette modélisation de $F_y(\delta)$: la forme générale de la fonction $F_y(\delta)$ n'est pas présentée, la valeur des différents coefficients D_k n'est pas donnée. Il semble que le propos de l'auteur ait été, plutôt que de proposer un modèle très pertinent de $F_y(\delta)$, d'utiliser une modélisation très approchée qui lui permet toutefois de prouver la robustesse de sa loi de commande. Pour le développement proprement dit de cette loi, l'auteur a utilisé l'expression *linéaire et découplée* (3.64) pour représenter la réaction transversale F_y , c'est-à-dire s'est arrêté au premier ordre dans le développement (3.94).

Enfin, dans [Ren93], [MCH91] et [Lee92], F_y est directement représentée par (3.64).

3.2.4 Expressions des différents modèles

Modèles du chariot

Nous détaillerons juste le modèle proposé dans [Sac93]. Le modèle proposé dans [Ren93], en effet, est juste la particularisation au cas du chariot du modèle générique développé dans [ACB95b], que nous avons déjà présenté à la section 3.2.1.

Dans [Sac93], les équations du chariot sont dérivées à partir de la RFD, écrite dans le repère $[O, J_x, J_y]$ (voir Figure 3.16) dont l'orientation est liée au robot. Les forces de résistance au roulement sont négligées. Il reste donc uniquement

les forces de contact pneumatique-sol $F_{x,i}$ et $F_{y,i}$ avec $i \in \{1, 2\}$,

les couples moteur ou freineur $C_{m,1}$ et $C_{m,2}$ appliqués à chacune des roues.

L'auteur, comme cela a été dit page 122, a souhaité, par analogie avec ce qui a été fait dans le cas roulement pur sans glissement, proposer 2 modèles pour le chariot : un modèle *cinématique* et un modèle *dynamique*.

modèle cinématique :

Le vecteur d'état dans ce cas est :

$$q_c = (x, y, \theta, V_x, V_y, \omega)$$

où

x, y sont les coordonnées de P , centre de l'essieu arrière dans le repère tournant $[O, J_x, J_y]$ (voir Figure 3.16),

θ est l'orientation du robot par rapport au repère fixe $[O, I_x, I_y]$ (voir Figure 3.16),

V_x, V_y sont les coordonnées de \vec{V} , vitesse linéaire de P , exprimée dans le repère tournant $[O, J_x, J_y]$ (voir Figure 3.16).

$$\omega = \dot{\theta}$$

et le vecteur de commande

$$\mathcal{I} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

avec $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$, les vitesses de rotation des roues 1 et 2.

L'utilisation de la RFD, et la modélisation retenue pour les efforts F_x et F_y (voir pages 131 et 133), conduisent au modèle

$$\begin{cases} \dot{x} &= V_x + y\omega \\ \dot{y} &= V_y - x\omega \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{V}_x &= V_y\omega + \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ \dot{V}_y &= -V_x\omega + \frac{G}{M}(\delta_1 + \delta_2) \\ \dot{\omega} &= \frac{LG}{I}(g_1 - g_2) \end{cases} \quad (3.95)$$

avec (seul le cas $\dot{\varphi} > 0$ et V_x a été considéré)

$$g_1 = \frac{R\dot{\varphi}_1 - (V_x + L\omega)}{V_x + L\omega} \quad (3.96)$$

$$g_2 = \frac{R\dot{\varphi}_2 - (V_x - L\omega)}{V_x - L\omega} \quad (3.97)$$

$$\delta_1 = \frac{V_y}{V_x + L\omega} \quad (3.98)$$

$$\delta_2 = \frac{V_y}{V_x - L\omega} \quad (3.99)$$

M et I respectivement la masse et le moment d'inertie du robot par rapport à un axe vertical passant par P ,

L la demi-longueur de l'essieu arrière,

G et D respectivement les rigidités de glissement et de dérive.

modèle dynamique

Le vecteur d'état est désormais :

$$q_c = (x, y, \theta, V_x, V_y, \omega, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

et les commandes :

$$\mathcal{I} = (C_{m,1}, C_{m,2})$$

L'utilisation de la RFD et la modélisation retenue pour les efforts F_x et F_y (voir pages 131 et 133), conduisent au modèle :

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x + y\omega \\ \dot{y} = V_y - x\omega \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{V}_x = V_y\omega + \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ \dot{V}_y = -V_x\omega + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \\ \dot{\omega} = \frac{LG}{J}(g_1 - g_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{J}(C_{m,1} - RGg_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{J}(C_{m,2} - RGg_2) \end{cases} \quad (3.100)$$

avec :

R rayon des roues,

J moment d'inertie des roues par rapport à leur axe de rotation.

Modèle du tricycle

A notre connaissance, seul l'auteur de [Ren93] a traité le cas du tricycle dans le cas où les glissements et les dérives sont pris en compte. Le modèle proposé dans [Ren93] est cependant uniquement la particularisation au cas du tricycle du modèle générique développé dans [ACB95b], déjà présenté à la section 3.2.1. Nous n'avons donc pas de détails supplémentaires à apporter à propos de ce modèle.

Modèles d'une voiture

Comme nous l'avons dit plus haut, les modèles de voiture proposés dans la littérature sont plus ou moins détaillés, en fonction des préoccupations et des objectifs des auteurs. Nous allons présenter successivement les modèles horizontaux d'une voiture, les modèles représentant sa dynamique latérale, et enfin ceux modélisant sa dynamique longitudinale. Les modèles complets, qui incluent la dynamique verticale d'une voiture seront simplement évoqués à la fin de cette partie, car ils sortent du cadre de ce rapport.

Modèle horizontal d'une voiture

Un modèle horizontal de voiture est proposé dans [MCH91]. L'objectif des auteurs est uniquement de contrôler la dynamique latérale du véhicule. Un modèle horizontal, c'est-à-dire incluant les dynamiques longitudinale et latérale, est toutefois construit par simple souci de présenter un modèle qui décrive complètement la mobilité du véhicule. C'est uniquement dans la partie synthèse de la loi de commande que la vitesse longitudinale sera prise constante, et la dynamique longitudinale laissée de côté.

On rappelle (voir page 127) que le système modélisé effectivement dans [MCH91] est le système décrit à la Figure 3.19, auquel aurait été adjoint, sur l'axe perpendiculaire à $(G_f G_r)$ passant par G , 2 roues folles, dont les centres, notés G_d et G_g , vérifieraient $\|G'G_d\| = \|G'G_g\| = d$. Le vecteur d'état choisi par les auteurs est très classique :

$$q = (V_x, V_y, \omega)$$

avec

(V_x, V_y) vitesse linéaire du centre du véhicule,

ω vitesse de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre du véhicule.

et le vecteur de commande

$$\mathcal{I} = (\alpha_f, \alpha_r)$$

où

α_f et α_r sont les orientations respectivement des roues avant et des roues arrière du véhicule.

Les équations du système sont dérivées à partir de la RFD, écrites dans un repère tournant du type $[O, J_x, J_y]$ de la Figure 3.16. Les forces prises en compte sont

les réactions transversales du sol sur les roues directrices avant et sur les roues directrices arrière, notées respectivement $F_{y,f}$ et $F_{y,r}$,

les réactions longitudinales du sol sur les roues directrices avant et sur les roues directrices arrière, notées respectivement $F_{x,f}$ et $F_{x,r}$,

les forces de résistance au roulement sur chacune des roues, notées F_{vf} , F_{vr} , F_{vd} et F_{vg} (respectivement roues directrices avant, arrière, roue folle droite et gauche), dont le module est calculé selon la relation

$$F_{v,i} = K F_{N,i} \quad i \in \{f, r, d, g\}$$

avec

K une constante positive,

$F_{N,i}$ la charge supportée par la roue i .

La RFD et la modélisation retenue pour les efforts F_x et F_y (voir pages 129 et 133), conduisent alors au modèle suivant

$$\begin{aligned} M\dot{V}_x &= MV_y\omega + (F_{x,f} - F_{v,f})\cos\alpha_f + (F_{x,r} - F_{v,r})\cos\alpha_r \\ &\quad - D^f\delta_f\sin\alpha_f - D^r\delta_r\sin\alpha_r - F_{v,d}\cos\alpha_d - F_{v,g}\cos\alpha_g \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} M\dot{V}_y &= -MV_x\omega + (F_{x,f} - F_{v,f})\sin\alpha_f + (F_{x,r} - F_{v,r})\sin\alpha_r \\ &\quad + D^f\delta_f\cos\alpha_f + D^r\delta_r\cos\alpha_r - F_{v,d}\sin\alpha_d - F_{v,g}\sin\alpha_g \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= l_f(F_{x,f} - F_{v,f})\sin\alpha_f - l_r(F_{x,r} - F_{v,r})\sin\alpha_r \\ &\quad + l_f D^f\delta_f\cos\alpha_f - l_r D^r\delta_r\cos\alpha_r \end{aligned} \quad (3.103)$$

avec

M et I la masse du véhicule et son moment d'inertie par rapport à un axe vertical passant par son centre,

α_d et α_g l'orientation des roues folles, respectivement droite et gauche.

D^f et D^r sont les rigidités de dérive respectivement des roues avant et arrière.

Note Nous trouvons surprenant que les 2 forces $F_{v,d}$ et $F_{v,g}$ n'apparaissent pas dans l'équation (3.103).

Modèle pour la dynamique latérale d'une voiture

Dans [MT92], [Lee92] et [Ack93], seule la dynamique latérale est modélisée. Les modèles obtenus sont les suivants

- Modèle proposé dans [MT92]

On rappelle (voir page 127) que le système modélisé dans [MT92] est directement le système représenté sur la Figure 3.18. L'objectif des auteurs est de réguler uniquement la dynamique latérale du véhicule, c'est-à-dire réguler autour de 2 valeurs de consigne, les 2 variables

V_y : vitesse latérale du véhicule (voir Figure 3.18),

ω : vitesse de rotation du véhicule (voir Figure 3.18).

Aussi, le vecteur d'état choisi est

$$q = (V_y, \omega)$$

quant au vecteur de commande, il consiste en

$$\mathcal{I} = (\alpha_f, \alpha_r, C_{m,i})$$

où

α_f et α_r sont les orientations respectivement des roues avant et des roues arrière,

$C_{m,i}$, avec $i \in [1, 4]$, sont les couples moteur ou freineur appliqués à chacune des roues.

Les équations du système sont dérivées à partir de la RFD, écrite toujours dans un repère tournant du type $[O, J_x, J_y]$ de la Figure 3.16. Les forces de résistance au roulement sont négligées. Il reste donc uniquement

les forces de contact pneumatique-sol $F_{x,i}$ et $F_{y,i}$ avec $i \in [1, 4]$,

les couples moteur ou freineur $C_{m,i}$, avec $i \in [1, 4]$, appliqués à chacune des roues.

Sans aucune approximation, les équations sont

$$\begin{aligned} M\dot{V}_y &= -MV_x\omega + \sum_{i=1}^4 Y_i \\ I\dot{\omega} &= l_f(Y_1 + Y_2) - l_r(Y_3 + Y_4) - d(X_1 + X_3) + d(X_2 + X_4) \end{aligned}$$

avec

M et I respectivement la masse et le moment d'inertie du véhicule par rapport à un axe vertical,

X_i et Y_i les composantes de la réaction du sol sur la roue i respectivement selon la direction donnée par V_x et par V_y (voir Figure 3.18), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} X_i &= F_{x,i} \cos \alpha_i - F_{y,i} \sin \alpha_i \\ Y_i &= F_{x,i} \sin \alpha_i + F_{y,i} \cos \alpha_i \end{aligned}$$

En explicitant les réactions longitudinales $F_{x,i}$ et transversales $F_{y,i}$ (représentation linéaire et découplée avec transfert de charge pris en compte, voir page 131), et en faisant les hypothèses supplémentaires

les angles α_i restent faibles, de sorte que $\sin \alpha_i \approx \alpha_i$ et $\cos \alpha_i \approx 1 \ \forall i \in \{1, 4\}$,

l'angle que présente \vec{V} avec l'axe longitudinal du véhicule reste faible, de sorte que $V_x \approx V$ et même $V_{x,i} \approx V$,

l'angle de dérive $\delta_i = \gamma_i - \alpha_i$ peut être approximé par $(\gamma_i, \text{angle du vecteur vitesse linéaire de la roue } i \text{ avec la direction longitudinale du véhicule, voir Figure 3.18})$

$$\begin{aligned} \text{roues avant} \quad \delta_i &= \frac{V_y + l_f}{V} - \alpha_i \\ \text{roues arrière} \quad \delta_i &= \frac{V_y - l_r}{V} - \alpha_i \end{aligned}$$

le modèle définitif du robot devient

$$M\dot{V}_y = -\frac{\sum_{i=1}^4 D^i}{V} V_y - \left[\frac{l_f(D^1 + D^2) - l_r(D^3 + D^4)}{V} + MV \right] \omega \\ + (F_{x,1} + F_{x,2} + D^1 + D^2)\alpha_f + (F_{x,3} + F_{x,4} + D^3 + D^4)\alpha_r \quad (3.104)$$

$$I\dot{\omega} = -\frac{l_f(D^1 + D^2) - l_r(D^3 + D^4)}{V} V_y - \frac{l_f^2(D^1 + D^2) + l_r^2(D^3 + D^4)}{V} \omega \\ + l_f(F_{x,1} + F_{x,2} + D^1 + D^2)\alpha_f - l_r(F_{x,3} + F_{x,4} + D^3 + D^4)\alpha_r \\ - d(F_{x,1} + F_{x,3} - F_{x,2} - F_{x,4} + (F_{y,1} - F_{y,2})\alpha_f + (F_{y,3} - F_{y,4})\alpha_r) \quad (3.105)$$

où les D^i sont les rigidités de dérive de chacune des 4 roues (i.e. $D^i = D_1^i F_{N,i}$). Quatre équations différentielles supplémentaires sont toutefois nécessaires pour relier les commandes effectives du système (i.e. les couples $C_{m,i}$ appliqués sur chacune des roues) au modèle (3.104)-(3.105)

$$I_i \dot{\varphi} = C_{m,i} - R F_{x,i}$$

avec

I_i moment d'inertie de la roue i par rapport à son centre,

R rayon des roues.

• Modèle proposé dans [Lee92]

On rappelle que le système utilisé pour construire le modèle dans [Lee92] est le système simplifié décrit sur la Figure 3.19 (voir page 125). On rappelle aussi que la vitesse longitudinale V_x est choisie constante, de sorte que les efforts longitudinaux $F_{x,i}$ sur chacune des roues sont tous nuls.

Le vecteur d'état choisi par l'auteur est

$$q = (s, \Delta y, \Delta \theta, V_y, \omega, \alpha_f, \alpha_r)$$

avec

s : abscisse curviligne le long de la trajectoire de référence,

Δy : erreur de positionnement latéral du robot, i.e. distance entre le centre du robot et sa projection sur la trajectoire de référence,

$\Delta \theta$: erreur d'orientation du robot, i.e. différence entre l'orientation du robot et la tangente à la trajectoire de référence,

V_y : vitesse latérale du centre du robot,

ω : vitesse de rotation du robot par rapport à un axe vertical passant par son centre,

α_f et α_r : orientations respectivement des roues avant et des roues arrière.

et le vecteur de commande

$$\mathcal{I} = (\alpha_{f,ref}, \alpha_{r,ref})$$

où

$\alpha_{f,ref}$ et $\alpha_{r,ref}$ sont les consignes d'orientation respectivement des roues avant et arrière.

Les équations du système sont dérivées à partir de la RFD, écrite toujours dans le repère tournant type $[O, J_x, J_y]$ de la Figure 3.16. Les forces de résistance au roulement sont négligées. Il reste donc uniquement

les réactions transversales du sol sur chacune des roues $F_{y,1}$ et $F_{y,2}$.

En utilisant pour $F_{y,i}$ la forme linéaire et découplée (3.64) (voir page 133), les équations sont :

$$M\dot{V}_y = -\frac{D^f + D^r}{V}V_y - \left[\frac{l_f D^f - l_r D^r}{V} + MV \right] \omega + D^f \alpha_f + D^r \alpha_r \quad (3.106)$$

$$I\dot{\omega} = -\frac{l_f D^f - l_r D^r}{V}V_y - \frac{l_f^2 D^f + l_r^2 D^r}{V}\omega + l_f D^f \alpha_f - l_r D^r \alpha_r \quad (3.107)$$

avec :

M et I respectivement la masse et le moment d'inertie du véhicule par rapport à un axe vertical passant par son centre,

D^f et D^r sont donnés par :

$$D^f = 2D^1 = 2D^2 \quad (3.108)$$

$$D^r = 2D^3 = 2D^4 \quad (3.109)$$

où les D^i sont les rigidités de dérive de chacune des 4 roues. (Pour les besoins du modèle simplifié, on a supposé que la rigidité de dérives des 2 roues avant et celle des 2 roues arrière étaient égales (i.e. $D^1 = D^2$ et $D^3 = D^4$)).

l_f, l_r, V sont respectivement les distances entre le centre du véhicule G et les centres des roues fictives avant et arrière, et la vitesse du centre du véhicule (voir Figure 3.19).

Comme attendu, les équations (3.106)-(3.107) correspondent exactement aux équations (3.104)-(3.105) entre les secondes et les premières, tous les $F_{x,i}$ ont été mis à zéro, les D^i ont été remplacés par D^f et D^r sur la base de (3.108) et (3.109), et les termes du second ordre du type $dF_{y,i}\alpha_i$ ont été négligés.

La dynamique des variables s , Δy et $\Delta \theta$ découle de simples considérations géométriques. Si l'on se place dans le cas (réaliste) où β , angle entre le vecteur vitesse du véhicule et la direction longitudinale de celui-ci (voir Figure 3.19), et $\Delta \theta$ restent petits, cette dynamique est donnée par les équations

$$\dot{s} = V \quad (3.110)$$

$$\Delta \dot{\theta} = \omega - \frac{V}{\rho_{ref}(s)} \quad (3.111)$$

$$\Delta \dot{y} = V\Delta \theta + V_y \quad (3.112)$$

Enfin, la dynamique du mécanisme orientant les roues est modélisée par un premier ordre, c'est-à-dire par

$$\dot{\alpha}_f = -\frac{1}{\tau_f}(\alpha_f - \alpha_{f,ref}) \quad (3.113)$$

$$\dot{\alpha}_r = -\frac{1}{\tau_r}(\alpha_r - \alpha_{r,ref}) \quad (3.114)$$

où

τ_f et τ_r sont des constantes positives,

Les équations (3.106)-(3.107)-(3.110)-(3.111)-(3.112)-(3.113)-(3.114) constituent le modèle de véhicule proposé dans [Lee92].

- Modèle proposé dans [Ack93]

On rappelle, voir page 125, que le système utilisé pour construire le modèle dans [Ack93] est, comme dans [Lee92] le système simplifié décrit sur la Figure 3.19. On rappelle aussi que, comme dans [Lee92], la vitesse longitudinale V_x est choisie constante, de sorte que les efforts longitudinaux $F_{x,i}$ sur chacune des roues sont tous nuls.

Le vecteur d'état choisi par l'auteur est très légèrement différent du vecteur d'état choisi par les auteurs de [MT92]. Il consiste en 2 variables

$$q = (\beta, \omega)$$

avec

β l'angle entre le vecteur vitesse \vec{V} du centre du véhicule, et la direction longitudinale attachée à ce véhicule (voir Figure 3.19)

ω vitesse de rotation du véhicule autour d'un axe vertical passant par le centre dudit véhicule (voir Figure 3.19)

et le vecteur de commande

$$I = (\alpha_f, \alpha_r)$$

où

α_f et α_r sont les orientations respectivement des roues avant et des roues arrière du véhicule.

Les équations du système sont dérivées à partir de la RFD, écrites encore une fois dans un repère tournant du type $[O, J_x, J_y]$ représenté sur la Figure 3.16. Les forces de résistance au roulement sont toujours négligées. Il reste donc uniquement

les réactions transversales du sol sur chacune des roues $F_{y,f}$ et $F_{y,r}$.

Un rapide calcul de cinématique montre que \dot{V}_y se ré-exprime en fonction des variables utilisées dans [Ack93] comme :

$$\dot{V}_y = \cos \beta (\dot{\beta} + \dot{\omega})V + \sin \beta \dot{V} \quad (3.115)$$

(où les variables sont définies sur la Figure 3.19). Puisque la vitesse V est, par hypothèse, constante (en magnitude), et vu que l'angle β reste petit, l'expression (3.115) peut être approximée par

$$\dot{V}_y = (\dot{\beta} + \dot{\omega})V \quad (3.116)$$

Les angles de dérive des roues avant et arrière, respectivement δ_f et δ_r , définis comme (voir Figure 3.19)

$$\begin{aligned} \delta_f &= \gamma_f - \alpha_f \\ \delta_r &= \gamma_r - \alpha_r \end{aligned}$$

peuvent, compte tenu que β est toujours petit, être approximés par

$$\delta_f = \alpha_f - \beta - \frac{l_f \omega}{V} \quad (3.117)$$

$$\delta_r = \alpha_r - \beta + \frac{l_r \omega}{V} \quad (3.118)$$

En utilisant la RFD et les relations (3.116)-(3.117)-(3.118), on aboutit au modèle finalement proposé dans [Ack93]

$$\begin{pmatrix} MV(\dot{\beta} + \dot{\omega}) \\ J\dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_f & \cos \alpha_r \\ l_f \cos \alpha_f & -l_r \cos \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{y,f} \left(\alpha_f - \beta - \frac{l_f \omega}{V} \right) \\ F_{y,r} \left(\alpha_r - \beta + \frac{l_r \omega}{V} \right) \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

où $F_{y,f}(\cdot)$ et $F_{y,r}(\cdot)$ sont les modèles non-linéaires (3.94) proposés pour la réaction transversale.

Modèle pour la dynamique longitudinale d'une voiture

On rappelle, voir page 128, que le système utilisé pour construire le modèle dans [TC91] est un système idéalisé composé d'une seule roue. On rappelle aussi que la réaction transversale F_y est nulle puisque les auteurs ont fait l'hypothèse que le robot se déplaçait uniquement en ligne droite (voir page 132), et que la réaction longitudinale $F_x(g)$ est connue via un réseau de courbes (voir page 130).

Les forces qui ont été prises en compte sont

Réaction longitudinale $F_x(g)$,

Couple moteur ou freineur (C_m) appliqué à l'axe de la roue.

Force (F_v) et couple (C_φ) de résistance au roulement (force et couples de résistance aérodynamiques, de friction, etc.),

Le modèle, obtenu par utilisation de la RFD, est le suivant

le vecteur d'état est

$$q = \left(\frac{V}{R}, \varphi \right)$$

avec

V vitesse linéaire du centre de la roue,

$\dot{\varphi}$ vitesse de rotation de la roue,

R rayon de la roue.

la commande :

$$\mathcal{I} = (C_m)$$

et les équations :

$$\frac{\dot{V}}{R} = -\frac{F_v(V)}{MR} + \frac{N_v F_x(g)}{MR} \quad (3.120)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{C_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})}{J} - \frac{N_{\dot{\varphi}} F_x(g)}{J} + \frac{C_m}{J} \quad (3.121)$$

avec

M et J respectivement la masse et le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe,

N_v et $N_{\dot{\varphi}}$ 2 constantes.

Modèle complet d'une voiture :

Nous appelons modèles complets d'une voiture les modèles qui prennent en compte tous les degrés de liberté d'une voiture, c'est-à-dire à la fois sa dynamique horizontale et verticale. Comme il a été dit page 128, ces modèles sont excessivement compliqués, et ne sont développés que dans le but de réaliser des simulateurs ou pour développer des commandes "haut niveau" (type commande hiérarchisée, floue ou par réseau de neurones). Vouloir construire des commandes type retour d'état sur ce type de modèles semble assez peu réaliste. Comme ce rapport se veut être une étude bibliographique sur la modélisation et la *commande par retour d'état* des robots mobiles dans le cas où glissements et dérives ne peuvent être négligés, nous ne détaillerons pas les modèles complets. Nous nous contenterons de présenter les degrés de liberté pris en compte dans l'ouvrage [Ell69], qui propose une étude approfondie de la modélisation et des propriétés des véhicules routiers, et dans 2 simulateurs : le simulateur VERI, développé par le CEA, et les simulateurs Pro-Lab I et Pro-Lab II développés dans le cadre du projet PROMETHEUS.

• Modèles proposés dans [Ell69]

L'objet de cet ouvrage, qui commence toutefois un peu à dater (1969), était de proposer une modélisation assez fine de la dynamique latérale d'un véhicule routier, et de caractériser certaines de leurs propriétés, en premier lieu leur stabilité. L'auteur par contre n'a pas du tout étudié les problèmes de commande automatique de tels véhicules.

Pour ce qui est de la modélisation des contacts pneumatique-sol

la réaction transversale F_y et le couple d'auto-alignement sont caractérisés par toute une série de courbes expérimentales, qui prennent en compte

- la nature du sol,
- la pression du pneumatique,
- la charge supportée par la roue,
- le carrossage de la roue.

Le couplage avec la réaction longitudinale est pris en compte via des courbes du type de la Figure 3.11. Des modèles analytiques pour F_y et C_a sont également proposés. À l'inverse des modèles proposés dans [BNP87], déduits de résultats expérimentaux via des interpolations, les modèles proposés dans [Ell69] ont été calculés mathématiquement, en modélisant le pneumatique par toute une série de ressorts. Nous avons rapidement présenté cette modélisation page 97 et page 101, mais de l'aveu même de l'auteur, cette modélisation n'est pas complètement satisfaisante.

la réaction longitudinale F_x par contre n'est pas du tout détaillée. Aucune relation entre F_x et les vitesses du véhicule et des roues n'est proposée, ni entre F_x et le couple appliqué sur les roues. Cela tient au fait que dans tous les calculs proposés dans la suite de [Ell69], l'hypothèse est faite que la vitesse du véhicule est constante (et donc $F_x = 0$).

Les différents modèles proposés dans [Ell69] sont

- une modélisation de la dynamique latérale du véhicule, construite sur la structure simplifiée décrite à la Figure 3.19,
- une modélisation de la dynamique latérale du véhicule, construite sur la structure réelle décrite à la Figure 3.18,
- une modélisation de la dynamique latérale d'un couple véhicule-remorque,
- une modélisation de la dynamique latérale d'un véhicule avec prise en compte des suspensions (et donc du roulis),

Ces modèles sont écrits sous les hypothèses que F_y et C_a peuvent être modélisés par les expressions linéaires (3.64) et (3.21). Des indications sont données pour tenir compte des non-linéarités. Les paramètres suivants sont pris en compte

- les transferts de charge dans les virages,
- les forces aérodynamiques,
- les effets du vent sur le comportement de la voiture.

Finalement, quelques indications sont données pour inclure dans les modèles

- la flexibilité des pneumatiques (le plan de la roue se déforme lors de la rotation de celle-ci),
- le carrossage,

le tangage,

les organes de transmission entre le volant et les roues.

Une série de tableaux présente enfin les caractéristiques géométriques et dynamiques des principaux véhicules routiers.

Pour chacun des modèles proposés, une étude très pointue de la stabilité du véhicule est présentée.

- Simulateur VERI

Le projet VERI, majoritairement développé par le CEA, a la finalité suivante *développer un véhicule tout terrain autonome, capable d'épandre un produit chimique sur un terrain quelconque contaminé par une explosion nucléaire ou une fuite de radio-activité, produit chimique qui maintiendrait la radio-activité en surface, l'empêchant ainsi d'atteindre la nappe phréatique et de se propager.* Parallèlement à l'instrumentation du véhicule tout terrain, un simulateur a été construit pour aider au développement et à la validation de lois de commande.

Ce simulateur, décrit dans [Tr 92], prend en compte à l'heure actuelle, les éléments suivants

les réactions longitudinales F_x et transversales F_y du sol sur les roues sont représentées par les modèles non-linéaires avec couplages (3.25) et (3.26).

les forces de résistance au roulement sont modélisées par un frottement sec et un frottement visqueux.

l'action des freins a été modélisée par la somme d'un frottement sec et d'un frottement visqueux.

le couple imposé par le moteur sur les roues motrices a été relié à la vitesse de rotation du moteur par un polynôme du second degré.

les convertisseurs de couple, la boîte de vitesse et le différentiels ont aussi été modélisés.

Dans l'avenir, il est prévu de prendre en compte

les couples d'auto-alignement

les amortisseurs, et donc le roulis et le tangage du véhicule,

les déports de charge dans les virages,

que le sol n'est pas nécessairement parfaitement plat.

- Démonstrateurs Pro-Lab I et Pro-Lab II

Le projet Pro-Lab, développé dans le cadre du projet PROMETHEUS, a pour but de mettre au point des systèmes d'aide à la conduite des capteurs embarqués sur le véhicule, associés à quelques algorithmes de commande seraient censés avertir en temps réel le conducteur du véhicule des dangers de certaines manœuvres : faisabilité d'un dépassement, vitesse limite dans un virage, distance trop faible entre le véhicule et le véhicule qui le précède, ... 2 démonstrateurs, Pro-Lab I et Pro-Lab II, ont été développés pour concevoir ces algorithmes "réflexes"

Ces simulateurs, décrits dans [All94], prennent en compte les éléments suivants

- les réactions longitudinales F_x et transversales F_y du sol sur les roues sont représentées par le modèle linéaire et découplé (3.63) et (3.64). Le modèle non-linéaire (3.12) et (3.19) est mentionné dans [All94], mais non exploité. De plus le lien entre F_x et le couple appliqué sur les roues n'est pas présenté de façon explicite.

- les couples d'auto-alignement sont décrits eux-aussi par un modèle linéaire.

- le roulis (mais pas le tangage, ni le déplacement vertical du véhicule)

- les dépôts de charge dans les virages.

- les forces de résistance au roulement sont modélisées par un rapport proportionnel avec la charge supportée par chacune des roues.

- les réactions aérodynamiques.

- une modélisation de la commande du conducteur : l'action du conducteur sur le volant n'est plus vue comme une succession d'échelons de consigne, mais comme une succession de rampes, légèrement retardées.

C'est ce modèle qui est utilisé dans les différents simulateurs. Par contre, pour le développement de lois de commande, un modèle horizontal, obtenu en éliminant le roulis des équations du modèle complet, est utilisé. Ce modèle s'apparente beaucoup au modèle présenté dans [MCH91]. Il lui est toutefois adjoint un algorithme évaluant en temps réel le roulis du véhicule à partir de l'évolution des variables du modèle horizontal, roulis qui peut ensuite être exploité à des fins de calcul de marges de sécurité. L'auteur montre que le modèle horizontal et l'observateur de roulis, pour peu que la simulation ne dure pas trop de temps (quelques dizaines de secondes), ne divergent pas trop par rapport au modèle complet. Pour des prédictions à court terme (par exemple faisabilité d'un dépassement), le modèle horizontal et l'observateur de roulis peuvent avantageusement remplacer le modèle complet.

Des références à d'autres simulateurs, comme ceux développés par les constructeurs et/ou équipementiers automobiles peuvent être trouvées dans [All94].

Chapitre 4

Commande sous les hypothèses de roulement pur sans glissement

A la section 2.1, lorsque nous avons discuté nos hypothèses de modélisation, nous avons affirmé (page 13) que l'Hypothèse 2.2 de roulement pur sans glissement plaçait les robots mobiles à roues dans la classe des systèmes mécaniques non-holonomes. Ce point, grâce aux éléments introduits au Chapitre 2, peut maintenant être vérifié très facilement : soit un robot mobile à roues quelconque. Celui-ci peut être décrit sans ambiguïté par la donnée du vecteur de coordonnées généralisées q présenté à la Proposition 2.7. Les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement se formulent alors comme un ensemble de contraintes du premier ordre, linéaires en les vitesses, qu'est tenu de respecter à chaque instant le vecteur q et sa dérivée, Proposition 2.12. Les 2 résultats suivants s'obtiennent alors très facilement

Proposition 4.1 Non-holonomie des robots mobiles à roues sous les Hypothèses 2.2

N'importe quel robot mobile à roues, sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement, est un système mécanique non-holonyme au sens de la Définition B.1 \square

Preuve : La Proposition 4.1 s'établit en reportant l'expression de la matrice des contraintes $A(q)$ donnée par la Proposition 2.12 dans l'algorithme proposé par le Théorème B.1 pour décider si un ensemble de contraintes du premier ordre linéaires en les vitesses est intégrable ou non. \triangleleft

Proposition 4.2 Non-holonomie du modèle réduit des robots mobiles à roues sous les Hypothèses 2.2

Sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement, nous avons montré qu'il est possible, pour chaque robot mobile à roues, de construire un modèle réduit aux seules variables utiles du point de vue de la commande (Théorème 2.10), et que ces modèles réduits constituent 5 classes d'équivalence (Théorème 2.11).

Ces modèles réduits présentent la structure suivante

les modèles réduits des robots de la classe \mathcal{R}_0^3 ne sont soumis à aucune contrainte,

*les modèles réduits des robots appartenant aux 4 autres classes sont maximale-
ment non-holonomes, c'est-à-dire aucune des contraintes auxquelles ils sont assujettis
n'est intégrable.* \square

Preuve : Dans le cas d'un modèle réduit, Théorèmes 2.3 ou 2.10, le robot n'est plus décrit que par sa position et son orientation (vecteur ξ) et, s'il y a lieu, par l'orientation de certaines roues directrices : β_1 s'il ne comporte qu'une roue directrice, (β_1, σ) si le robot est équipé de 2 ou plus de 2 roues directrices, Théorème 2.14. Ces variables ne sont contraintes que par les $n^{di} + n^f$ dernières lignes de la relation $A(q)\dot{q} = 0$, i.e., Proposition 2.12, $A_{31}(\beta_1)R(\theta)\dot{\xi} = 0$. Les $n + n^{de}$ autres lignes de $A(q)\dot{q} = 0$ peuvent en effet toujours être satisfaites, relations (2.17) et (2.18), quels que soient ξ , ξ , β_1 , β_1 , σ et $\dot{\sigma}$.
2 cas de figure se présentent alors :

pour les robots de la classe \mathcal{R}_0^3 , nous avons $A_{31}(\beta_1) = 0$. Le modèle réduit de ces systèmes n'est par conséquent soumis à aucune contrainte,

pour les robots des autres classes, nous avons par contre $A_{31}(\beta_1) \neq 0$. En reportant dans l'algorithme du Théorème B.1 les expressions proposées pour le noyau de $A_{31}(\beta_1)$ dans le Tableau 2.1, on montre facilement qu'aucune de ces contraintes n'est intégrable. Le modèle réduit de ces 4 classes de robots mobiles à roues est donc maximale-ment non-holonyme. \triangleleft

Comme nous ne souhaitons commander que la position et l'orientation des robots (la commande des autres variables n'offrant aucun intérêt pratique) nous ne considérerons plus dans la suite de ce mémoire que les modèles réduits (cinématiques ou dynamiques) de ces systèmes. Aussi, nous introduisons la convention suivante :

Convention 4.1 *Dans la suite de ce mémoire, par modèle (cinématique ou dynamique), nous sous-entendons toujours modèle réduit (cinématique ou dynamique) (Théorèmes 2.3 ou 2.10).* \square

Une présentation générale des systèmes non-holonomes est donnée à l'Annexe B. Cet ensemble regroupe de très nombreux systèmes mécaniques, a priori très différents, mais partageant pourtant un certain nombre de caractéristiques, en particulier au niveau de la commande. La section B.3 présente ainsi les principales propriétés des systèmes assujettis à des contraintes du premier ordre, linéaires en les vitesses, et dont aucune n'est intégrable. Au vu de la Proposition 4.2, c'est exactement la sous-classe à laquelle appartiennent les modèles de tous les robots mobiles, exception faite bien sûr des robots omnidirectionnels, classe \mathcal{R}_0^3 . Ces propriétés sont

ces systèmes sont commandables, même au sens fort (i.e. STLC), Théorème B.8,

ces systèmes ne sont pas linéarisables par bouclage d'état statique, Théorème B.11. La dimension du plus grand sous-espace linéarisable est $2(n - m)$ alors que la dimension du vecteur d'état est $2n - m$ (voir le modèle général (B.13) pour l'explicitation de ces dimensions),

ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés sur une configuration de repos au moyen d'un bouclage d'état au moins continûment différentiable, Théorème B.13.

Ces 3 propriétés mettent bien en évidence les difficultés propres à la commande de ces systèmes il est tout d'abord, au vu du Théorème B.8, possible de commander ces systèmes. Cependant, il va falloir traiter séparément le problème de la poursuite d'une trajectoire mobile de celui de la stabilisation sur une configuration de repos. En effet, il n'y a aucun obstacle théorique à réaliser la poursuite d'une trajectoire mobile au moyen de bouclage d'état C^∞ . Par contre, Théorème B.13, il faut se tourner vers des lois beaucoup moins classiques si l'on veut stabiliser ces systèmes. Enfin, même la poursuite d'une trajectoire mobile présente des difficultés l'approche linéarisation exacte par bouclage d'état statique, couramment utilisée par exemple pour commander les robots manipulateurs complètement actionnés (loi du couple calculée), ne permet ici de ne linéariser qu'une partie des équations du modèle. Il faudra donc là encore envisager des techniques moins classiques.

Nous ne nous intéresserons pas à la commande des robots de la classe \mathcal{R}_0^3 . Ces systèmes étant sans contraintes, leur commande ne propose pas de difficulté particulière. Le modèle cinématique de ces systèmes peut être écrit de manière condensée (cf. Tableau 2.1) :

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta)\eta_m \quad (4.1)$$

Soit $\xi_{ref}(t)$ la trajectoire de référence, mobile ou comportant des points d'arrêt. La loi de commande :

$$\eta_m = R(\theta)[\dot{\xi}_{ref}(t) - k(\xi - \xi_{ref}(t))] \quad k \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

linéarise complètement le système (4.1) et assure donc une convergence exponentielle vers la trajectoire de référence. La loi de commande (4.2) illustre la mobilité parfaite des robots de la classe \mathcal{R}_0^3 et leur grande facilité de commande.

Pour la commande des autres classes de robots, plusieurs techniques ont été proposées aussi bien pour la poursuite d'une trajectoire mobile que pour la stabilisation sur une trajectoire de référence. Elles ont été proposées soit directement pour ces robots, soit pour des systèmes présentant des contraintes non-holonomes identiques, ces résultats étant alors immédiatement transposables au cas des robots mobiles. Un bref état de l'art est donné en tête de chaque section.

Ces lois ont cependant toujours laissé de côté le problème spécifique posé par les robots de la classe \mathcal{R}_1^1 , à savoir leurs singularités. Celles-ci ont été discutées à la section 2.4 : les singularités du modèle (2.68) correspondent à des orientations des roues directrices pouvant conduire à une saturation des actionneurs et par conséquent à une perte du contrôle du robot. Les lois de commande proposées pour ces systèmes doivent donc garantir que ces singularités seront évitées. Notre objectif dans ce chapitre est de construire des lois de commande pour ces systèmes non-holonomes, qui répondent à ce besoin. Le problème de la poursuite d'une trajectoire mobile et celui de la stabilisation sur une configuration de repos sont envisagés respectivement aux sections 4.1 et 4.2. Les techniques utilisées sont respectivement un bouclage d'état dynamique linéarisant et une loi de bouclage instationnaire. Enfin, à la section 4.3, nous considérons un problème qui a été peu étudié, même

pour les systèmes non-holonomes ne comportant pas de singularités : à savoir proposer une commutation naturelle entre les lois de poursuite et de stabilisation pour pouvoir réaliser la poursuite d'une trajectoire se terminant par une configuration de repos. Ce problème nous a semblé particulièrement important d'un point de vue pratique, puisque la mission type demandée à un robot mobile à roues est de joindre 2 configurations de repos via une trajectoire pré-définie.

L'essentiel de nos lois de commande ont été développées à partir du modèle *cinématique* des robots \mathcal{R}_2^1 (Théorème 2.13). C'est en effet lui qui impose d'une part la structure non-holonyme et d'autre part le problème des singularités. Sous les Hypothèses 2.7 et 2.8, le modèle *dynamique* (Théorème 2.14) ne fait qu'ajouter un étage d'intégrateurs.

Nous voudrions pour terminer, insister sur le fait que le problème que nous nous sommes posés n'est pas purement académique : les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 peuvent suivre n'importe quelle trajectoire $\xi_{ref}(t) = (x_{ref}(t), y_{ref}(t), \theta_{ref}(t))$. En effet, en faisant varier l'orientation (β_1, σ) des roues directrices, il est possible de donner n'importe quelle valeur à $\dot{\xi}$ (cf. Théorème 2.13). Cette large capacité d'évolution est bien sûr très intéressante d'un point de vue pratique, et justifie que l'on cherche à commander ces systèmes, en dépit de leurs singularités.

À la section 4.2.3, nous ferons une parenthèse sur la commande des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 : le cas d'un robot appartenant à la classe \mathcal{R}_0^2 est envisagé, en raison de sa simplicité, pour analyser la vitesse de convergence des lois de bouclage instationnaires.

4.1 Poursuite d'une trajectoire mobile

Comme il a été dit dans l'introduction de ce chapitre, le problème de la poursuite d'une trajectoire mobile (i.e. poursuite d'un robot de référence qui ne s'arrête) ne se heurte pas à l'obstruction de Brockett (Théorème B.12) et peut donc a priori être résolu à l'aide de bouclages d'état C^∞ . Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus à l'aide des 2 approches classiques de l'Automatique non-linéaire, i.e. l'approche Lyapunov et l'approche linéarisation exacte.

4.1.1 Résultats existants

4.1.1.a Approche Lyapunov

Plusieurs fonctions de Lyapunov ont été proposées pour réaliser la poursuite d'une trajectoire mobile. On distingue 2 grandes catégories.

D'une part, les lois de poursuite cherchant à faire converger l'état du système $\xi(t)$ vers une trajectoire de référence $\xi_{ref}(t)$. Les premières solutions ont été proposées dans [SA90] et [KKMN91] pour le cas d'un robot \mathcal{R}_0^2 . Elles utilisent des fonctions de Lyapunov où apparaît la différence $(\xi(t) - \xi_{ref}(t))$. Pour assurer la convergence, il est nécessaire que la vitesse de la trajectoire de référence ne s'annule jamais.

D'autre part, les lois de poursuite cherchant à faire décroître la distance entre le robot

et sa trajectoire de référence, sans poursuivre explicitement un point sur cette trajectoire de référence. Pour cela, le formalisme de l'abscisse curviligne et des repères de Frenet est utilisé. La vitesse d'avancement du robot est laissée au choix de l'utilisateur, elle peut s'annuler ponctuellement, mais ne doit pas bien sûr tendre vers 0 (le robot ne pourrait alors plus converger vers sa trajectoire de référence). Cette approche a été proposée originellement dans [Sam92] pour le cas encore une fois d'un robot \mathcal{R}_0 .

Plus récemment, cette seconde approche a été utilisée sur le cas d'un robot de la classe \mathcal{R}_2 , [MS94]. L'évitement des singularités internes à ces systèmes était assuré grâce à la forme particulière de la fonction de Lyapunov utilisée par les auteurs.

4.1.1.b Approche linéarisation exacte

On dispose en Automatique Linéaire d'un très grand nombre d'outils, souvent simples d'utilisation, permettant d'analyser et de commander un système. Aussi, une démarche naturelle au moment d'aborder l'étude et la commande d'un système non-linéaire est de rechercher s'il existe un jeu de coordonnées généralisées avec lequel ce système se ré-écrit sous une forme linéaire. Cette démarche dite de linéarisation exacte d'un système non-linéaire, peut, dans le cas d'un système affine en les commandes (cas très général et le seul rencontré dans ce mémoire) être formalisée de façon précise comme suit

Soit un système S non-linéaire, ne dépendant pas du temps, et affine en les commandes, c'est-à-dire

$$S \quad \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i$$

avec x , vecteur d'état de dimension n , $f(x)$ et $g_i(x)$ fonctions C^∞ de x , et u vecteur de commande de dimension m .

Le problème de la linéarisation exacte du système S autour d'une configuration x_0 s'écrit existe-t-il ?

un voisinage U de x_0 ,

un changement de variables difféomorphe Ψ

$$\begin{aligned} U &\mapsto V \subset \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto z = \Psi(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

un retour d'état non singulier^(4.1) $u(x, v)$

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^m &\mapsto \mathbb{R}^m \\ (x, v) &\mapsto u = u_1(x) + u_2(x)v \end{aligned} \quad (4.4)$$

telles que le système S , sous l'effet des transformations (4.3) et (4.4) se ré-écrit sous la forme d'un système linéaire commandable

$$\forall x \in U \quad \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i \xrightarrow{\text{via (4.3) et (4.4)}} \dot{z} = Az + Bv$$

(A, B) paire commandable

^(4.1) un retour d'état est dit non-singulier si le terme $u_2(x)$ multipliant le vecteur de commande auxiliaire v vérifie $u_2(x)$ inversible $\forall x \in U$

A la différence de la linéarisation tangente du système S .

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x_0) u$$

qui est, par construction, une approximation du système non-linéaire, la linéarisation exacte de S sur U décrit parfaitement S ; ce système a juste été ré-écrit différemment. Par conséquent, alors que le domaine de validité du linéarisé tangent est forcément limité, celui de la linéarisation exacte s'étend à tout le voisinage U , celui-ci pouvant dans certains cas (par exemple pour les robots manipulateurs complètement actionnés) s'étendre à tout l'espace d'état.

Convention 4.2 Dans toute la suite de ce mémoire, par le terme "linéarisation" nous sous-entendons toujours "linéarisation exacte" \square

Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système non-linéaire soit linéarisable ont été proposées indépendamment dans [JR80] et [HSM83] (cf. Théorème B.9). Dans le cas où le système n'est pas linéarisable, les théorèmes proposés dans [KIR83] et [Mar86] mettent en évidence le plus grand sous-espace linéarisable (cf. Théorème B.10). Une présentation détaillée de ces résultats est donnée dans [Isi89, Chap. 4 et 5] et [NS90, Chap. 6].

Comme il a été dit dans l'introduction, les robots mobiles à roues, excepté ceux de la classe \mathcal{R}_3^2 , ne sont pas complètement linéarisables par bouclage d'état statique (Théorème B.13). Un ensemble de fonctions de sortie réalisant la linéarisation partielle de taille maximale a été proposée, pour les 4 classes de robots non-holonomes, dans [ACB95a]. Des conditions sur la trajectoire de référence ont également été données afin d'assurer que la dynamique des variables non linéarisées est stable.

Lorsqu'un système non-linéaire n'est pas complètement linéarisable au moyen des transformations (4.3) et (4.4), une alternative à la linéarisation partielle consiste à rechercher une linéarisation complète à l'aide d'une loi de retour d'état plus générale que la loi (4.4), précisément une loi de retour d'état dynamique

Définition 4.1 Loi de retour d'état dynamique

Soit un système non-linéaire S , ne dépendant pas du temps et affine en les commandes

$$S \quad \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) u$$

avec x , vecteur d'état de dimension n , $f(x)$ et $g_i(x)$ fonctions C^∞ de x , et u vecteur de commande de dimension m .

On appelle loi de retour d'état dynamique pour le système S , une loi de retour d'état se présentant sous la forme

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y)v \quad u_2(x, y) \text{ inversible } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = \dot{u}_1(x, y) + \dot{u}_2(x, y)v \quad y(0) = y_0 \quad (4.6)$$

avec y un vecteur de dimension p .

Proposer une loi de retour d'état dynamique pour un système S consiste donc à adjoindre à S p états fictifs, notés y , dont nous nous faisons la dynamique et la condition initiale (relation (4.6)), puis à synthétiser une loi de retour d'état classique (dite encore statique) pour le système étendu relation (4.5). D'un point de vue pratique, les lois de retour d'état dynamiques peuvent être implémentées en plaçant en parallèle sur le module commandant les différents moteurs, un second module simulant en temps réel les états fictifs y . \square

L'utilisation de lois de retour d'état dynamiques pour réaliser la linéarisation d'un système non-linéaire a été proposée initialement dans [DM85] et [NR88]. Différents auteurs ont ensuite illustré, sur de nombreux exemples, que ce type de commande permet effectivement de linéariser un ensemble de systèmes bien plus large que celui obtenu en n'utilisant que des lois de retour d'état statiques. Une condition nécessaire, très simple, pour qu'un système soit linéarisable par une loi de retour d'état dynamique, a été donnée dans [Cha89] : il faut que le linéarisé tangent du système soit commandable au point autour duquel on souhaite réaliser la linéarisation ([Cha89, Th 3.8]). Des conditions suffisantes ou nécessaires et suffisantes ont également été proposées dans la littérature, [Cha89, Th 3.10-3.12], [Pom94, Th 4] et [AMP95, Th 4.3] par exemple, mais ne sont pas toujours facilement exploitables. Enfin, puisqu'un système plat (Définition dans [Mar93b]) est toujours linéarisable par retour d'état dynamique, les différents critères de platitude ([Mar93b], [Mar93a], [RFLM93],...) peuvent également être utilisés pour tester la linéarisabilité du système étudié.

Il est montré dans [ABC92] et [ACB95a] que les 4 modèles généraux (Tableau 2.1) de robots mobiles à roues non-holonomes sont tous complètement linéarisables par retour d'état dynamique, moyennant quelques singularités. Une singularité en particulier est commune pour les 4 classes de robots : la vitesse des robots ne doit pas être nulle. Cela était attendu au vu de l'obstruction de Brockett (Théorème B.12). Les sorties linéarisantes ont été calculées à l'aide de l'algorithme d'extension dynamique. Cet algorithme est présenté à la section 4.1.2 où nous prouvons que le modèle (2.67) que nous avons proposé pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 est également complètement linéarisable par bouclage d'état dynamique.

D'autres exemples d'utilisations de la linéarisation par bouclage dynamique sur des systèmes mécaniques peuvent être trouvés dans [AMS91] (robot manipulateur sous-actionné) et [Bou92] (pont-roulant).

4.1.2 Linéarisation par bouclage dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

Travail ayant donné lieu à un article, [TAM95b] et 2 rapports [TAM92c] et [TAM93].

Linéarisation par retour d'état statique

Avant de détailler la procédure de linéarisation par bouclage *dynamique*, nous rappelons succinctement, juste dans le but de préciser nos notations, la technique permettant

de linéariser un système par bouclage *statique*. Une présentation précise peut être trouvée dans [Isi89] ou [NS90].

Soit un système non-linéaire décrit par la représentation d'état cinématique

$$\dot{\chi} = f_0(\chi) + f(\chi) \mathcal{I} \quad (4.7)$$

avec χ et \mathcal{I} , respectivement le vecteur d'état de dimension n_χ et le vecteur de commande de dimension $n_\mathcal{I}$. La synthèse d'une loi de retour d'état *statique* consiste à rechercher une fonction de sortie de dimension m , $\phi = (\phi_1(\chi), \dots, \phi_m(\chi))$, et un vecteur de m entiers $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ tels que

- l'application Ψ , définie ci-dessous, est un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{R}^{n_\chi} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_\chi} \\ \chi &\rightarrow \Phi = \left(\phi_1(\chi), \dots, \frac{d^{\mu_1} \phi_1(\chi)}{dt^{\mu_1}}, \dots, \phi_m(\chi), \dots, \frac{d^{\mu_m} \phi_m(\chi)}{dt^{\mu_m}} \right)^T \end{aligned} \quad (4.8)$$

($\sum_{i=1}^m \mu_i$ doit être égal à $n_\chi - m$ de manière que ϕ soit bien un vecteur de dimension n_χ).

- la $(\mu + 1)^{\text{ème}}$ dérivée de ϕ lorsqu'elle est ré-écrite comme ci-dessous, fait apparaître une matrice $D(\chi)$ inversible

$$\frac{d^{\mu+1} \phi(\chi)}{dt^{\mu+1}} = \left(\frac{d^{\mu_1+1} \phi_1(\chi)}{dt^{\mu_1+1}}, \dots, \frac{d^{\mu_m+1} \phi_m(\chi)}{dt^{\mu_m+1}} \right)^T = f_1(\chi) + D(\chi) \mathcal{I} \quad (4.9)$$

Quand ces 2 conditions sont satisfaites, lorsque le difféomorphisme (4.8) et la loi de commande statique

$$\mathcal{I} = D^{-1}(\chi) (\mathcal{I}_a - f_1(\chi)) \quad (4.10)$$

(avec \mathcal{I}_a un vecteur de commandes auxiliaires de dimension m) sont appliqués au système (4.7), nous obtenons pour ce dernier, une structure linéaire. Plus précisément, le système (4.7) se présente sous la forme canonique de Brunovsky avec, pour indices de commandabilité, $\mu_1 + 1, \dots, \mu_m + 1$.

Algorithme d'extension dynamique

Puisque le modèle cinématique (2.68) est maximale non-holonyme, sa linéarisation complète par retour d'état statique est impossible quel que soit le couple (ϕ, μ) vérifiant (4.8), la matrice D définie par (4.9) ne sera jamais inversible. Au niveau des équations, cette impossibilité se traduit comme suit : à l'ordre de dérivation $\mu + 1$, les fonctions de sortie ϕ sont affectées par certaines des commandes ou certaines combinaisons des commandes, mais pas par l'ensemble des commandes.

L'algorithme d'extension dynamique ([DM85],[NR88]) propose d'incorporer dans le vecteur d'état du système, les commandes ou les combinaisons des commandes qui apparaissent à l'ordre $\mu + 1$, et de regarder leur dérivée comme de nouvelles commandes. La représentation du robot est alors constituée par la représentation initiale augmentée par plusieurs intégrateurs. Cette représentation sera appelée modèle étendu du robot. La dérivée de ϕ à l'ordre $\mu + 1$, de par la construction du modèle étendu, ne comporte pas de commande. Nous pouvons par conséquent poursuivre les dérivations, et il est alors

possible que le modèle étendu soit complètement linéarisable par bouclage statique. Supposons que ce soit le cas. Puisque revenir depuis les commandes du système étendu vers les commandes initiales ne requiert, par construction, qu'une intégration en ligne, il est possible de commander le système initial à partir de la loi de commande proposée pour le modèle étendu. Le système initial est dit *dynamiquement linéarisable*. Pour obtenir une linéarisation complète, il est parfois nécessaire de procéder à plusieurs extensions successives. L'idée générale reste la même à chaque étape : "retarder les commandes qui apparaissent trop tôt"

Construction d'une loi de retour d'état dynamique linéarisant le modèle (2.67) d'un robot appartenant à la classe \mathcal{R}_2^1

Nous montrons maintenant, Théorème 4.1, que le modèle cinématique (2.67) des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 peut être linéarisé à l'aide de l'algorithme d'extension dynamique. Nous explicitons ensuite la loi de bouclage dynamique.

Nous apportons tout d'abord une très légère modification à l'écriture du modèle (2.67)

Soit la constante strictement positive σ_l définie par

$$\sigma_l = \min_{2 \leq i \leq n^{\text{th}}} \sigma_i, \quad \sigma_i \text{ défini à la Proposition 2.21} \quad (4.11)$$

La position et l'orientation du châssis sera désormais repérée, non plus par le vecteur ξ , mais par un vecteur qui lui est très semblable, le vecteur ϕ défini par

$$\phi = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_l} \right)^T$$

Le modèle cinématique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 s'écrit alors

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{\dot{\theta}}{\sigma_l} \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \\ \frac{\sigma}{\sigma_l} \end{pmatrix} \eta_1 \\ \dot{\beta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\sigma} = \eta_3 \end{cases} \quad (4.12)$$

σ_l , au vu de (4.11), peut être vu comme une grandeur caractéristique du robot étudié. Nous l'introduisons dans le modèle de ce dernier de telle façon que le vecteur ϕ représentant la position et l'orientation du châssis, soit constitué par 3 variables présentant la même dimension (i.e. des mètres). Ce point sera important lorsque nous discuterons de la commutation entre la loi de bouclage dynamique et la loi de retour d'état instationnaire au sein de la loi hybride, section 4.3.

Théorème 4.1 Linéarisation par bouclage dynamique du modèle (4.12)

Il est possible de linéariser par bouclage dynamique le modèle (4.12) décrivant les possibilités d'évolution d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 , à condition que

- (a) les orientations singulières des roues directrices ne soient jamais rencontrées, i.e. $\beta_{1,\dots,n} \notin \mathcal{O}_s$,
 (b) la vitesse du robot ne soit jamais nulle, i.e. $\eta_1 \neq 0$.

Les fonctions de sortie réalisant cette linéarisation sont

$$\phi = (x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}) \quad (4.13)$$

La variable de commande à retarder, une unique fois, est η_1 □

Preuve : Le Théorème 4.1 nous invite à considérer comme fonctions de sortie, les 3 composantes du vecteur ϕ .

Pour chacune de ces fonctions, la commande cinématique η_1 apparaît au premier ordre de dérivation (cf. expression de $\dot{\phi}$ donnée par (4.12)). Les conditions (4.8) et (4.9) ne sont donc pas satisfaites. Le système (4.12) n'est donc pas complètement linéarisable par bouclage statique via le choix de fonctions de sortie (4.13). Cette conclusion était attendue puisque, le système (4.12) étant non holonome, il n'existe aucun choix de fonctions de sortie qui permette une linéarisation complète à l'aide de tels bouclages.

L'algorithme d'extension dynamique nous invite, dans cette situation, à retarder la commande η_1 , c'est-à-dire, à considérer désormais le modèle étendu

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(\theta + \beta_1) \eta_1 \\ \dot{y} = -\cos(\theta + \beta_1) \eta_1 \\ \frac{\dot{\theta}}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} \eta_1 \\ \dot{\beta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\sigma} = \eta_3 \\ \dot{\eta}_1 = \eta_4 \end{cases} \quad (4.14)$$

dont les vecteurs d'état et de commande sont

$$x_e = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, \beta_1, \sigma, \eta_1 \right)^T \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_e = (\eta_2, \eta_3, \eta_4)^T \quad (4.15)$$

et dont les singularités sont, par construction, celles du modèle (4.12), c'est-à-dire les orientations des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_s . Nous montrons ci-dessous que le système (4.14), à la condition que les 2 hypothèses présentées au Théorème 4.1) sont satisfaites, est complètement linéarisable par bouclage statique, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur μ tel que les relations (4.8) et (4.9) sont vérifiées. Ce résultat terminera la preuve du Théorème 4.1.

Puisque pour le modèle étendu (4.14), η_1 est un état et non une commande, nous pouvons dériver les fonctions de sortie ϕ au-delà de l'ordre 1. Pour toutes les composantes de ce vecteur, les commandes apparaissent à l'ordre 2

$$\ddot{\phi} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \frac{\ddot{\theta}}{\sigma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta_1) \sigma \eta_1^2 \\ \sin(\theta + \beta_1) \sigma \eta_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta_1) \eta_1 & 0 & \sin(\theta + \beta_1) \\ \sin(\theta + \beta_1) \eta_1 & 0 & -\cos(\theta + \beta_1) \\ 0 & \frac{\sigma}{\sigma_1} & \frac{\sigma}{\sigma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

La relation (4.16) se présente exactement sous la forme (4.9) le vecteur μ est égal à $(1, 1, 1)$ et la matrice $D(\chi_e)$ est inversible au vu de l'Hypothèse (b) du Théorème 4.1. Il reste donc, pour établir que le modèle (4.14) est complètement linéarisable par bouclage statique, à prouver que l'application Ψ définie dans notre cas par (relation (4.8))

$$\Psi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6 \quad \chi_e \rightarrow \Phi = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, \dot{x}, \dot{y}, \frac{\dot{\theta}}{\sigma_1} \right)^T \quad (4.17)$$

est un difféomorphisme.

L'application Ψ n'est en fait pas stricto sensu difféomorphique. En effet, à chaque valeur de χ_e est associée, au vu de (4.14) et (4.17), une unique valeur Φ ; par contre, toujours au vu de (4.14) et de (4.17), chaque valeur de Φ propose 2 antécédents

$$\tilde{\chi}_e \xrightarrow{\Psi^{-1}} \begin{cases} \chi_{e,1} = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, -\theta - \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) + f(\dot{y})\pi, \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^T \\ \chi_{e,2} = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, -\theta - \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) + [1 - f(\dot{y})]\pi, -\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^T \end{cases} \quad (4.18)$$

avec

$$\begin{aligned} f(\dot{y}) &= 1 \quad \text{si} \quad \dot{y} \geq 0 & f(\dot{y}) &= 0 \quad \text{sinon} \\ \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) &= \text{sign}(\dot{x})\frac{\pi}{2} & & \text{quand } \dot{y} = 0 \end{aligned}$$

L'existence de 2 antécédents découle du fait que (cf. Preuve de la Proposition 2.20) le CIR associé à une orientation non-singulière des roues directrices peut être représenté de façon équivalente par (β_1, σ) ou $(\beta_1 + \pi, -\sigma)$.

L'hypothèse (b) du Théorème 4.1 permet cependant de considérer Ψ comme un difféomorphisme. En effet, cette hypothèse assure que tout au long du déplacement du robot, nous avons $\eta_1 \neq 0$. Il en découle, puisque les variables d'état du système étendu sont continues (la loi de bouclage dynamique étant elle-même continue), que η_1 garde nécessairement un signe constant lors du déplacement du robot. La donnée de la valeur initiale de η_1 lève par conséquent l'ambiguïté sur l'antécédent de Φ . Au vu de (4.18), nous avons

$$\Phi \xrightarrow{\Psi^{-1}} \begin{cases} \text{Si } \eta_1(0) > 0 & \chi_e = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, -\theta - \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) + f(\dot{y})\pi, \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^T \\ \text{Si } \eta_1(0) < 0 & \chi_e = \left(x, y, \frac{\theta}{\sigma_1}, -\theta - \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) + [1 - f(\dot{y})]\pi, -\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^T \end{cases} \quad (4.19)$$

Cela termine la preuve du Théorème 4.1. ◁

Le difféomorphisme (4.19) et la loi de commande (4.10) proposés par le Théorème 4.1 permettent de présenter le modèle étendu (4.14) d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 sous la forme linéaire suivante

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & Id_{3 \times 3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi + \begin{pmatrix} 0 \\ Id_{3 \times 3} \end{pmatrix} I_a \quad (4.20)$$

N'importe quelle technique de l'Automatique linéaire peut alors être utilisée pour construire une loi de commande I_a qui assure le suivi de la trajectoire de référence.

Une approche placement de pôles conduit à la loi suivante soit $\phi_{ref}(t)$ la trajectoire de référence pour les fonctions de sortie ϕ , et soient H_1 et H_2 , 2 matrices diagonales positives constantes. La loi de commande \mathcal{I}_a donnée par

$$\mathcal{I}_a = -H_1(\phi - \phi_{ref}) - H_2(\dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}) + \ddot{\phi}_{ref} \quad (4.21)$$

assure la convergence exponentielle de $\phi(t)$ vers $\phi_{ref}(t)$. En effet, l'expression du système en boucle fermée est tout simplement (en reportant (4.21) dans (4.20))

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\phi}} &= \mathcal{A}\tilde{\phi} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id_{3 \times 3} \\ -H_1 & -H_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{\phi} &= \phi - (\phi_{ref}, \dot{\phi}_{ref})^T = (\phi - \phi_{ref}, \dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref})^T \end{aligned} \quad (4.22)$$

La matrice \mathcal{A} présentant par construction des valeurs propres dont les parties réelles sont toutes strictement négatives, le système (4.22) est bien exponentiellement stable. Les valeurs propres de \mathcal{A} peuvent être ajustées, en fonction de la vitesse de convergence désirée par l'utilisateur, via le choix des matrices H_1 et H_2 .

Evitement des singularités

Dans le cas des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , une loi de bouclage dynamique devient singulière, d'après le Théorème 4.1, dans 2 situations

d'une part, si l'orientation des roues directrices prend une valeur singulière ($\beta_1, \dots, \beta_n \in O_s$ Hypothèse (a)). Cette première singularité de la loi de bouclage dynamique est tout à fait naturelle, puisque, dans cette situation, le modèle sur lequel elle est construite est faux,

d'autre part, si la vitesse du robot est nulle ($\eta_1 = 0$ Hypothèse (b)). Cette seconde singularité de la loi de bouclage dynamique est à relier à l'obstruction de Brockett. Celle-ci assure en effet qu'il est impossible de stabiliser un système non-holonyme (et donc un robot mobile) au moyen d'une loi de retour d'état continûment différentiable. Un bouclage dynamique C^∞ ne peut donc pas, quel que soit le choix proposé pour les fonctions de sortie, faire suivre à un robot mobile une trajectoire de référence qui se terminerait par $\eta_{1,ref} = 0$. La singularité de la loi de bouclage dynamique proposée ci-dessus (lois (4.10)-(4.21)) n'est donc qu'un tout petit peu plus restrictive que la singularité incontournable découlant de l'obstruction de Brockett. Il a été montré, [Sam95] ou [MS94] par exemple, que l'Hypothèse (b) du Théorème 4.1 pouvait être levée si l'évolution du robot était étudiée avec comme index la distance parcourue par celui-ci. Plus précisément, si au lieu d'écrire et d'analyser la dérivée du vecteur d'état par rapport au temps, comme cela est fait dans le modèle (4.12), on écrit et on analyse la dérivée de celui-ci par rapport à s , abscisse curviligne du projeté d'un point fixe du robot sur la trajectoire de référence. Cette seconde approche permet de ramener l'Hypothèse (b) à $\eta_{1,ref}(t)$ ne tend pas vers 0 pour t approchant (i.e. hypothèse minimale imposée par l'obstruction de Brockett), mais induit d'autres contraintes d'une part, la trajectoire de référence doit présenter des courbures peu élevées, de façon à ce que le point fixe choisi sur le robot n'ait

qu'un unique projeté sur la trajectoire de référence; d'autre part, le point fixe ne doit jamais se trouver sur le centre de courbure de la trajectoire de référence.

Dans ce mémoire, nous garderons toujours le temps comme index.

Lorsque le robot se trouve dans l'une des 2 situations singulières décrites ci-dessus, la commande calculée par la loi de bouclage dynamique devient infinie : lorsque $\beta_{1,\dots,n^*} \in \mathcal{O}_s$, la relation (2.61) ne permet plus de calculer les vitesses d'orientation des roues directrices, elle fournit des valeurs infinies pour $\dot{\beta}_{1,\dots,n^*}$; lorsque $\eta_1 = 0$, la matrice D donnée par (4.16) n'est pas inversible, et par conséquent le premier retour d'état (4.10) renvoie des valeurs infinies. Dans le cadre d'une application pratique, cela signifie que le contrôle et donc la sécurité du robot mobile ne seraient plus assurés, ce qui n'est pas admissible. Ainsi la loi de bouclage dynamique ne présente un intérêt que si l'on est capable, connaissant l'état initial du robot et la trajectoire de référence, de garantir que les situations singulières ne seront jamais rencontrées durant le déplacement du robot.

Nous apportons ci-dessous une réponse à ce problème. Nous prouvons, Théorème 4.2, que, si l'erreur initiale entre le robot et la trajectoire de référence est inférieure à une borne, donnée explicitement, alors les situations singulières pour la loi de bouclage dynamique ne seront jamais rencontrées.

Pour obtenir ce résultat, nous utilisons la proposition suivante, [ACB95a]

Proposition 4.3 [ACB95a] Evitement de singularités lors d'une commande par bouclage dynamique

Soit $\Phi_{ref}(t) = (\phi_{ref}(t), \dot{\phi}_{ref}(t))^T$, la trajectoire de référence. Pour des raisons évidentes, nous supposons que $\phi_{ref}(t)$ ne comporte pas de singularités.

Soit $\tilde{\Phi}(t)$, l'erreur à l'instant t entre la configuration du robot et la trajectoire de référence

$$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) - \Phi_{ref}(t)$$

Soit $M(t)$, la distance entre la trajectoire de référence $\Phi_{ref}(t)$ et la singularité la plus proche, i.e. $M(t)$ est la fonction vérifiant

$$\forall t \quad \|\tilde{\Phi}(t)\| < M(t) \implies \Phi(t) \text{ n'est pas une configuration singulière} \quad (4.23)$$

Soit $K(t)$, une fonction décroissant exponentiellement ($K(t) = k_1 e^{-k_2(t-t_0)}$ avec k_1, k_2 , 2 constantes positives) caractérisant la dynamique en boucle fermée du robot, i.e.

$$\forall t \quad \|\tilde{\Phi}(t)\| \leq K(t) \|\tilde{\Phi}(t_0)\| \quad (4.24)$$

Soit enfin ε , un nombre positif arbitrairement petit.

Si

$$\|\tilde{\Phi}(t_0)\| \leq \min_{t \geq t_0} \left(\frac{M(t) - \varepsilon}{K(t)} \right) \quad (4.25)$$

ALORS les singularités ne seront jamais rencontrées durant tout le déplacement du robot.

□

Preuve : La condition (4.25) assure qu'à l'instant initial t_0 , le robot ne se trouve pas dans une situation singulière. En effet, en choisissant $t = t_0$ dans la relation (4.24), nous obtenons que

$$k_1 = K(t_0) \geq 1$$

puis, en reportant ce résultat dans (4.25), nous en déduisons que

$$\|\tilde{\Phi}(t_0)\| < M(t_0)$$

Cette dernière relation, au vu de (4.23), montre bien qu'à t_0 la situation du robot n'est pas singulière.

Pour la partie principale de la preuve de la Proposition 4.3, nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un instant $T > t_0$ pour lequel

$$\|\tilde{\Phi}(t)\| < M(t) \quad \forall t \in [t_0, T[\quad (4.26)$$

$$\|\tilde{\Phi}(T)\| = M(T) \quad (4.27)$$

La relation (4.26) assure, au vu de (4.23), que sur l'intervalle de temps $[t_0, T[$, le robot ne rencontre aucune situation singulière. La relation (4.24) est par conséquent vérifiée sur tout cet intervalle. En reportant (4.25) dans (4.24), nous obtenons que

$$\forall t \in [t_0, T[\quad \|\tilde{\Phi}(t)\| \leq K(t) \min_{t \geq t_0} \left(\frac{M(t) - \varepsilon}{K(t)} \right) \leq K(t) \frac{M(t) - \varepsilon}{K(t)}$$

c'est-à-dire finalement .

$$\forall t \in [t_0, T[\quad \|\tilde{\Phi}(t)\| \leq M(t) - \varepsilon \quad (4.28)$$

$\tilde{\Phi}(t)$ et $M(t)$ étant continus pour tout t , et donc pour $t = T$, la relation (4.28) contredit la relation (4.27). Il n'existe donc aucun instant T vérifiant (4.27), ce qui termine la preuve de la Proposition 4.3. \triangleleft

Puisque $K(t)$ décroît exponentiellement, le minimum de la fonction $\left(\frac{M(t) - \varepsilon}{K(t)} \right)$ apparaissant dans (4.25) est obtenu pour une valeur de t proche de t_0 . Aussi, les seules valeurs de $M(t)$ qui rentrent en compte pour le calcul de l'erreur initiale maximale entre le robot et la trajectoire de référence sont celles pour $t \approx t_0$. La trajectoire de référence peut donc passer près d'une singularité (i.e. $M(t) \approx 0$), mais à condition que ce ne soit pas dans les premiers instants.

La Proposition 4.3 est très générale. Elle montre que si un système, quel qu'il soit, est commandé par une loi de bouclage dynamique, et si la boucle fermée ainsi obtenue présente des singularités, alors il est toujours possible, en restreignant la plage de variation des conditions initiales, de garantir que ces singularités sont évitées lors de l'évolution de ce système. Pour exploiter maintenant ce résultat dans le cadre d'une application pratique, le point délicat consiste à calculer les fonctions $K(t)$ et $M(t)$, définies respectivement par (4.24) et (4.23), afin de déterminer explicitement, relation (4.25), les conditions initiales permises. La fonction $K(t)$, puisqu'elle caractérise la dynamique du système après

linéarisation, peut être calculée de manière identique pour tous les systèmes. À l'inverse, la fonction $M(t)$ dépend des singularités présentées par le système et de la trajectoire de référence choisie. Il ne peut donc exister aucune méthode générale pour calculer cette fonction. Nous proposons ci-dessous une technique pour obtenir la fonction $K(t)$, et pour le cas particulier des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , un calcul de $M(t)$.

La fonction $K(t)$ peut être obtenue en utilisant une approche Lyapunov.

La matrice \mathcal{A} décrivant le système en boucle fermée (relation (4.22)) présente, par construction, des valeurs propres dont les parties réelles sont toutes strictement négatives. L'équation matricielle de Lyapunov pour les systèmes linéaires permet alors de construire une fonction de Lyapunov pour le système en bouclé. Plus précisément, \mathcal{A} présentant des valeurs propres à partie réelle toute strictement négatives, la relation matricielle

$$\mathcal{A}^T Q^2 + Q^2 \mathcal{A} = -Q^1 \quad (4.29)$$

admet, quelle que soit la matrice Q^1 positive définie symétrique, une unique solution Q^2 positive définie symétrique, dont l'expression est (voir par exemple [Yos66, Th 18.1])

$$Q^2 = \int_0^\infty e^{s\mathcal{A}'} Q^1 e^{s\mathcal{A}} ds \quad (4.30)$$

Les fonctions

$$V(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi}' Q^2 \tilde{\Phi} \quad (4.31)$$

sont alors toutes des fonctions de Lyapunov pour le système bouclé (4.22) puisque, en reportant (4.22) dans la dérivée de (4.31), nous obtenons

$$\dot{V}(\tilde{\Phi}) = -\tilde{\Phi}' Q^1 \tilde{\Phi} \leq 0$$

Les fonctions $V(\tilde{\Phi})$ et $\dot{V}(\tilde{\Phi})$ étant toutes les deux des formes quadratiques, nous avons

$$\lambda_{\min}(Q^2) \|\tilde{\Phi}\|^2 \leq V(\tilde{\Phi}) \leq \lambda_{\max}(Q^2) \|\tilde{\Phi}\|^2 \quad \text{et} \quad \lambda_{\min}(Q^1) \|\tilde{\Phi}\|^2 \leq \dot{V}(\tilde{\Phi}) \leq \lambda_{\max}(Q^1) \|\tilde{\Phi}\|^2 \quad (4.32)$$

avec $\lambda_{\min}(Q^2)$, $\lambda_{\max}(Q^2)$ et $\lambda_{\min}(Q^1)$, $\lambda_{\max}(Q^1)$ respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres des matrices positives définies symétriques Q^2 et Q^1 . Puisque nous cherchons à caractériser la vitesse de convergence du système bouclé (4.22), plaçons nous dans le cas où initialement le système n'est pas sur la trajectoire de référence, i.e. $\tilde{\Phi}(t = t_0) \neq 0$. La convergence d'un système linéaire étant asymptotique, nous avons dans ce cas $\tilde{\Phi}(t) \neq 0 \quad \forall t$. En utilisant (4.32), nous pouvons alors écrire que

$$\frac{\dot{V}(\tilde{\Phi}(t))}{V(\tilde{\Phi}(t))} \leq \frac{\lambda_{\min}(Q^1) \|\tilde{\Phi}(t)\|^2}{\lambda_{\max}(Q^2) \|\tilde{\Phi}(t)\|^2} = -\frac{\lambda_{\min}(Q^1)}{\lambda_{\max}(Q^2)} \quad (4.33)$$

ce qui conduit encore, après intégration de (4.33) à

$$V(\tilde{\Phi}(t)) \leq V(\tilde{\Phi}(0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q^1)}{\lambda_{\max}(Q^2)} t} \quad (4.34)$$

En reportant enfin (4.32) dans (4.34) nous obtenons finalement que

$$\lambda_{\min}(Q^2) \|\tilde{\Phi}(t)\|^2 \leq V(\tilde{\Phi}(0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q^1)}{\lambda_{\max}(Q^2)} t} \leq \lambda_{\max}(Q^2) e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q^1)}{\lambda_{\max}(Q^2)} t} \|\tilde{\Phi}(0)\|^2 \quad (4.35)$$

La relation (4.35) montre qu'une expression possible pour la fonction $K(t)$ est

$$K(t) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}t} \quad (4.36)$$

La seule difficulté dans l'approche proposée ci-dessus pour obtenir $K(t)$ réside dans le calcul explicite de la matrice positive définie symétrique Q^2 , définie par (4.30). Nous montrons en annexe, section E.2.1, que compte tenu de la structure très simple de la matrice \mathcal{A} (relation (4.22)), Q^2 peut être obtenue sans calcul d'exponentielle de matrice, et sans intégration matricielle.

Le calcul de la fonction $M(t)$, à l'inverse de celui de $K(t)$, ne peut pas être conduit de manière générale : $M(t)$ dépend des singularités du système considéré et de la trajectoire de référence qu'il lui est demandé de suivre. Les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 présentant plusieurs groupes de singularités (Hypothèses (a) et (b) du Théorème 4.1), le calcul de $M(t)$ pour ces systèmes est loin d'être trivial. Si nous voulons respecter à la lettre la définition de $M(t)$ donnée par (4.23), il faudrait, pour chaque instant t , calculer d'une part, la distance entre $\Phi_{ref}(t)$ et les configurations $\{\Phi = (\star, \star, \star, 0, 0, 0)^T\}$ (singularité $\eta_1 = 0$), d'autre part, la distance entre $\Phi_{ref}(t)$ et toutes les configurations $\{\Phi = \Psi(\star, \star, \star, s, \star)\}$ où s est l'un des éléments de ${}^2\mathcal{O}_s$ ou ${}^3\mathcal{O}_s$ (relations (2.74) et (2.72)), puis enfin calculer le minimum de toutes ces distances. Cette série de calculs peut être raisonnablement menée lorsque les singularités de modélisation sont ${}^2\mathcal{O}_s$ (cas des robots ne comportant que 2 roues directrices ou $n^{di} \geq 3$ roues directrices dont les centres s_i sont alignés). Par contre, quand les singularités de modélisation sont ${}^3\mathcal{O}_s$ (cas des robots équipés de $n^{di} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés), étant donné le cardinal de cet ensemble (voir relation (2.72)), le calcul de $M(t)$ devient excessivement long et complexe. Aussi, dans ce dernier cas, nous nous contenterons de calculer uniquement un minorant de cette fonction. Plus précisément, nous considérons comme singulières toutes les orientations des roues pour lesquelles

$$|\sigma| \geq \sigma_i \quad \sigma_i \text{ défini par (4.11)} \quad (4.37)$$

D'un point de vue pratique, la nouvelle contrainte (4.37) signifie que sont proscrites toutes les orientations des roues directrices pour lesquelles le rayon de courbure associé est inférieur au maximum des $\|\vec{S}_1 S_i\|$ $2 \leq i \leq n^{di}$. Cette nouvelle contrainte n'est pas complètement artificielle : le déplacement d'un robot avec un rayon de courbure faible n'est en général pas souhaitable, car il peut amener pour des vitesses importantes un retournement du robot.

Les calculs permettant d'obtenir l'expression de $M(t)$ sont présentés en annexe, section E.2.2. Nous donnons ici simplement le résultat

$$\begin{aligned} n^{di} &= 2 \\ n^{di} &\geq 3 \text{ et } S_i \text{ alignés} \end{aligned} \quad M(t) = |\eta_{1,ref}(t) \sin \beta_{1,ref}(t)| \quad (4.38)$$

$$n^{di} \geq 3 \text{ et } S_i \text{ non alignés} \quad M(t) = |\eta_{1,ref}(t)| \frac{|\sigma_{ref}(t)| - \sigma_i}{\sqrt{1 + \sigma_i^2}} \quad (4.39)$$

Les développements précédents permettent d'apporter une réponse au problème de l'évitement des singularités d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 lors d'une commande par bouclage dynamique

Théorème 4.2 Evitement des singularités d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 lors d'une commande par bouclage dynamique

Si l'erreur initiale entre un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 et sa trajectoire de référence vérifie

$$\|\tilde{\Phi}(t_0)\| \leq \min_{t \geq t_0} \left(\frac{M(t) - \varepsilon}{K(t)} \right) \quad (4.40)$$

avec

$M(t)$ donnée par (4.38) ou (4.39),

$K(t)$ donnée par (4.36) (et où Q^2 est explicitement défini par (E.54)),

ε est un scalaire positif arbitrairement petit

alors la loi de retour d'état dynamique (4.10)-(4.21) n'amènera jamais le robot sur les singularités repérées par les Hypothèses (a) et (b) du Théorème 4.1 \square

Preuve : La preuve du Théorème 4.2 est immédiate au vu de la Proposition 4.3 et des relations (4.36), (4.38) et (4.39). \triangleleft

Evitement des obstacles

L'évitement des obstacles présents dans le plan d'évolution du robot peut être garanti de la même manière que celui des singularités. Il suffit juste d'introduire la fonction $N(t)$

$$\forall t \quad \|\tilde{\Phi}(t)\| < N(t) \implies \text{le robot ne heurte pas les obstacles}$$

et de remplacer dans le Théorème 4.2 l'équation (4.40) par

$$\|\tilde{\Phi}(t_0)\| \leq \min_{t \geq t_0} \left(\frac{\min(M(t), N(t)) - \varepsilon}{K(t)} \right) \quad (4.41)$$

4.2 Stabilisation par bouclage instationnaire

L'obstruction de Brockett (Théorème B.12) assure qu'il est impossible de stabiliser les robots mobiles non-holonomes au moyen de lois de bouclage d'état au moins continûment différentiables (Théorème B.13).

L'alternative la plus naturelle est de se tourner vers des lois de bouclage d'état discontinues. C'est la solution proposée par exemple dans [CS92] et [Sø93b], où le robot est amené vers sa cible au moyen de familles de cercles, dans [BRM92] où une loi de commande continue par morceaux est utilisée, ou encore dans [Ast95] où la commande repose sur une approche algébrique. Ce type de lois produit des résultats très satisfaisants (taux de convergence exponentiel par exemple), mais sont difficilement implémentables en pratique : un système mécanique accepte mal les commandes discontinues. Cela est encore plus vrai lorsque la loi discontinue a été calculée pour un modèle cinématique, c'est-à-dire pour un modèle où les commandes sont les vitesses du système mécanique.

Une seconde alternative, beaucoup moins intuitive, a été proposée initialement dans [Sam90], sur le cas d'un robot \mathcal{R}_3 : elle consiste à utiliser une loi de bouclage de l'état et du temps. Ce type de loi, encore appelée loi instationnaire, est celle que nous nous sommes proposés d'utiliser dans cette section, principalement parce que de telles lois peuvent être choisies infiniment différentiables.

4.2.1 Résultats existants

A la suite de l'article [Sam90], plusieurs lois de stabilisation par bouclage d'état instationnaire C^∞ ont été proposées pour différents robots [CA92], [Pom92], [KGM93], . . . Toutes ces lois, comme la loi initiale proposée dans [Sam90], reposent sur des fonctions de Lyapunov.

En parallèle à ces articles, où l'objectif est de construire une loi de bouclage d'état instationnaire, un résultat théorique important a été prouvé dans [Cor92a]

Théorème 4.1 [Cor92a] Stabilisation des systèmes non-linéaires sans dérive par bouclage d'état instationnaire

Tout système non-linéaire sans dérive, i.e.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i, \quad x \text{ état} \quad u_i, (1 \leq i \leq m) \text{ commandes}$$

peut, s'il est commandable, être stabilisé au moyen de lois de bouclage d'état instationnaires C^∞ □

Le Théorème 4.1 établit définitivement la pertinence des lois de bouclage d'état instationnaires C^∞ pour, de façon générale, la stabilisation d'une large classe de systèmes non-linéaires, et de façon plus particulière, pour la stabilisation des modèles cinématiques des robots mobiles à roues non-holonomes (puisque ceux-ci sont sans dérive, cf. Tableau 2.1).

La preuve du Théorème 4.1 n'est malheureusement pas constructive. Il n'existe donc pas, comme du reste pour la plupart des synthèses de lois de commande reposant sur une approche Lyapunov, de démarche systématique permettant d'obtenir une loi de bouclage d'état instationnaire stabilisant un système non-holonyme donné. La méthode de synthèse proposée dans [Pom92] peut en théorie être utilisée sur une très large classe de systèmes non-holonomes, mais en raison de la complexité des calculs qu'elle impose, elle ne peut être utilisée en pratique que sur des systèmes présentant des équations relativement simples (voir la présentation rapide de cette loi à la section 4.3.3.a). La méthode de synthèse aujourd'hui la plus générale est celle reposant sur les systèmes chaînés, introduits initialement dans [MS93] : le système chaîné le plus simple est celui présentant la structure suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^0 &= v_1 & \dot{z}_2^0 &= v_2 \\ \dot{z}_{21}^1 &= z_2^0 v_1 \\ \dot{z}_{21}^{n-2} &= z_{21}^{n-3} v_1 \end{aligned}$$

A l'inverse, le système chaîné le plus complexe étudié dans [MS93] est celui s'écrivant

$$\begin{aligned} \dot{z}_j^0 &= v_j & j &\in \{1, \dots, m\} \\ \dot{z}_{ij}^1 &= z_i^0 v_j & i > j \text{ et } z_{ij}^1 &\triangleq z_i^0 z_j^0 - z_{ji}^1 \\ \dot{z}_{ij}^k &= z_{ij}^{k-1} v_j & i, j &\in \{1, \dots, m\} \text{ et } k > 1, \quad i \neq j \end{aligned}$$

La structure très particulière de ces systèmes permet

d'établir facilement qu'ils sont commandables, [MS93],

de construire des lois de commande boucle ouverte joignant 2 configurations quelconques. Plusieurs méthodes ont été proposées ([TMS95] par exemple)

- soit à l'aide de sinusoides sélectionnées à des fréquences bien particulières,
- soit à l'aide de commandes continues par morceaux,
- soit à l'aide de commandes polynomiales.

de construire des lois de commande boucle fermée. En particulier, il a été proposé plusieurs lois de bouclage d'état instationnaires stabilisant les systèmes chaînés les plus simples [TMW92], [WB93], [PS93], [Sam95],

Au vu de toutes les propriétés particulièrement intéressantes de ces systèmes, plusieurs conditions suffisantes ont été recherchées pour déterminer si un système non-linéaire à 2 entrées, [MS93], ou à 3 entrées, [BTS95] et [LA95], peut, après un changement de variables difféomorphe et un premier retour d'état statique inversible, être ré-écrit comme un système chaîné. Une condition suffisante plus générale, autorisant un retour d'état non plus statique, mais dynamique, a également été proposée pour des systèmes à plus de 3 entrées, [TSBS94]. Ces différentes conditions suffisantes sont constructives, c'est-à-dire, dans le cas où la réponse est positive, fournissent le difféomorphisme et le retour d'état. Elles ont permis de mettre en évidence qu'un grand nombre de systèmes pouvaient être ré-écrits comme des systèmes chaînés. En particulier, il a été prouvé, [LA95], que les

modèles des 4 classes de robots mobiles à roues non-holonomes pouvaient être présentés sous forme chaînée (et uniquement avec des retours d'état statiques). De façon générale, rechercher si un système donné peut être transformé en un système chaîné apparaît comme une démarche naturelle, permettant, si elle est couronnée de succès, d'utiliser les lois de bouclage d'état instationnaires déjà proposées, ou d'en construire de nouvelles à partir d'un modèle ayant une structure beaucoup plus simple.

4.2.2 Stabilisation par bouclage instationnaire d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

Nous proposons une loi de retour d'état instationnaire garantissant que les singularités du modèle (2.54) d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 sont évitées durant le mouvement du robot.

Nous avons ici volontairement écarté l'approche, mentionnée ci-dessus, qui consiste à recourir à la forme chaînée. La mise sous forme chaînée crée assez souvent des singularités artificielles dans le modèle du système ainsi transformé. C'est en particulier le cas pour la transformation proposée pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 dans [LA95]. Nous avons donc préféré utiliser directement le modèle proposé par le Théorème 2.13, qui a été justement construit de telle sorte qu'il ne comporte aucune singularité artificielle.

Pour garantir que les singularités ne sont pas rencontrées, nous nous aidons d'un raisonnement géométrique nous montrons tout d'abord, section 4.3.2.a, qu'il est possible de représenter chaque orientation non-singulière des roues directrices comme l'un des points de la sphère unité. Cette représentation est ensuite utilisée, section 4.3.2.b, pour construire une loi de retour d'état instationnaire cinématique qui assure que les orientations $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{O}_s$ ne sont jamais rencontrées. Nous montrons enfin, section 4.3.2.c, que cette loi cinématique peut être convertie partiellement en loi dynamique. La section 4.3.2.d illustre les possibilités de cette loi instationnaire à l'aide de simulations. Ce travail a été décrit dans les articles [MAT92] et [TAM95b] et dans les rapports [TAM92c] et [TAM93].

4.2.2.a Représentation de \mathcal{O}_{ns} par un vecteur de la sphère unité

Nous rappelons le modèle cinématique (2.67) d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= R^T(\theta) \tilde{P}(\beta_1, \sigma) \eta_1 \\ \dot{\beta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\sigma} &= \eta_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$\tilde{P}(\beta_1, \sigma) = \begin{pmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \\ \frac{\sigma}{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

et en ayant tenu compte du fait que (voir (2.13))

$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$$

La Proposition 2.20 assure que toute orientation non singulière des roues directrices peut être repérée par le couple (β_1, σ) . Au vu de l'expression du vecteur $\bar{P}(\beta_1, \sigma)$ (relation (4.2)), elle peut également être repérée par ce dernier. Ce résultat est tout à fait logique : puisque toute orientation non singulière des roues directrices est associée bijectivement à un unique *CIR* (voir preuve de la Proposition 2.20) à tout $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{O}_{ns}$ est associé bijectivement une unique possibilité d'évolution pour le robot, c'est-à-dire un seul vecteur $P(\beta_1, \sigma)$ au vu de (4.1).

Nous montrons ci-dessous que, par un changement de variables et de commandes, le vecteur $\bar{P}(\beta_1, \sigma)$ peut être ré-écrit comme un vecteur de la sphère unité. Les propriétés géométriques associées à un tel vecteur seront utilisées comme un guide, à la section 4.3.2.b, pour construire une loi de retour d'état instationnaire garantissant l'évitement des singularités.

Afin de ré-écrire $\bar{P}(\beta_1, \sigma)$ comme un vecteur de la sphère unité, nous introduisons les 2 changements de variables et de commande sur le modèle cinématique (4.1)

tout d'abord, nous substituons la variable d'état σ par la variable β , définie par le difféomorphisme :

$$\tan \bar{\beta} = \frac{\sigma}{\sigma_1} \quad \bar{\beta} \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\quad (4.3)$$

où σ_1 est la constante définie par (4.11),

ensuite nous substituons les degrés de liberté cinématiques η_1, η_2 et η_3 par ν_1, ν_2 et ν_3 définis par les relations difféomorphiques

$$\begin{cases} \nu_1 &= \frac{\eta_3}{\cos \bar{\beta}} \\ \nu_2 &= \eta_2 \\ \nu_3 &= \frac{\sigma_1 \eta_2}{\sigma_1^2 + \sigma^2} \end{cases} \quad (4.4)$$

Puisque $\bar{\beta} \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ (cf. définition (4.3)), $\cos \bar{\beta}$ est toujours différent de zéro. La relation exprimant ν_1 en fonction de η_1 a donc toujours un sens.

En reportant (4.3) et (4.4) dans (2.67), nous obtenons une nouvelle expression pour le modèle cinématique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= R^{-1}(\theta) \cdot P(\beta_1, \bar{\beta}) \nu_1 \\ \dot{\beta}_1 &= \nu_2 \\ \dot{\bar{\beta}} &= \nu_3 \end{cases} \quad (4.5)$$

avec

$$P(\beta_1, \bar{\beta}) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} \sin \beta_1 \\ -\cos \bar{\beta} \cos \beta_1 \\ \sin \bar{\beta} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Le vecteur $P(\beta_1, \bar{\beta})$ ainsi obtenu est clairement un vecteur de la sphère unité.

Nous avons montré au début de cette section que toute orientation non singulière des roues directrices peut être repérée par $\bar{P}(\beta_1, \sigma)$. Puisque les vecteurs $\bar{P}(\beta_1, \sigma)$ et $P(\beta_1, \bar{\beta})$

sont reliés par un difféomorphisme, elle peut également être repérée par $P(\beta_1, \bar{\beta})$. Enfin, ce dernier vecteur décrivant la sphère unité, nous obtenons que tout $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$ peut être représenté comme un point sur cette sphère.

Au vu de la Proposition 2.20 et des relations (2.72) et (2.74), l'ensemble des $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$ est décrit en faisant varier le couple (β_1, σ) dans $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$ puis en retranchant les ensembles ${}^2\mathcal{O}_s$ ou ${}^3\mathcal{O}_s$ suivant le nombre et la disposition des roues directrices. \mathcal{O}_{ns} est en fait décrit 2 fois, puisque (β_1, σ) et $(\beta_1 + \pi, -\sigma)$ correspondent à la même orientation des roues directrices, voir la preuve de la Proposition 2.20.

Si maintenant, nous considérons l'image de \mathcal{O}_{ns} sur la sphère via le vecteur $P(\beta_1, \bar{\beta})$, au vu de (4.3) et (4.6), il apparaît clairement que chaque point de la sphère représente une unique $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$ excepté les 2 pôles et les points associés aux ensembles ${}^2\mathcal{O}_s$ ou ${}^3\mathcal{O}_s$. Chaque $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$ est pour sa part représenté 2 fois, par 2 points diamétralement opposés.

En reportant (4.3) et (4.6) dans (2.72) et (2.74), on montre facilement que les ensembles ${}^2\tilde{\mathcal{O}}_s$ et ${}^3\tilde{\mathcal{O}}_s$, images sur la sphère de respectivement ${}^2\mathcal{O}_s$ et ${}^3\mathcal{O}_s$, sont :

$${}^3\tilde{\mathcal{O}}_s : \begin{cases} \text{Les 2 pôles de la sphère, associés à } (\star, \pm\infty), \\ 2(n^d - 1) \text{ points isolés sur la sphère, associés aux autres éléments de } {}^3\mathcal{O}_s. \end{cases} \quad (4.7)$$

$${}^2\tilde{\mathcal{O}}_s : \text{Le cercle équatorial correspondant à } \beta_1 = 0. \quad (4.8)$$

Le problème posé par les singularités du modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^2 peuvent en définitive être exprimé également comme

“Les lois de commande construites pour un robot de la classe \mathcal{R}_1^2 doivent garantir que le vecteur de la sphère unité $P(\beta_1, \bar{\beta})$, constituant du modèle cinématique réduit de ces robots (modèle (4.5)), ne passe jamais par les ensembles ${}^2\tilde{\mathcal{O}}_s$ ou ${}^3\tilde{\mathcal{O}}_s$ (suivant le nombre et la disposition des roues directrices) pendant le déplacement du robot.”

Une loi de retour d'état instationnaire pour les robots de la classe \mathcal{R}_1^2 est proposée à la section suivante. Une solution est apportée au problème des singularités en s'appuyant sur les caractéristiques géométriques des vecteurs de la sphère unité.

4.2.2.b Synthèse d'une loi de retour instationnaire cinématique

Le Théorème 4.2 ci-dessous propose une loi de retour d'état instationnaire permettant de stabiliser n'importe quel robot de la classe \mathcal{R}_1^2 sur la configuration finale

$$\phi = (0, 0, 0)^T \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \bar{\beta} = 0$$

Le choix de la configuration finale du vecteur ϕ n'est pas restrictif il est en effet toujours possible, en spécifiant le repère immobile $[O, \vec{i}, \vec{j}]$, de faire en sorte que les coordonnées de la cible soient effectivement $\phi = (0, 0, 0)^T$. Quant à la configuration finale des roues directrices, elle est en règle générale sans intérêt lors d'une application pratique. Aussi, nous avons choisi arbitrairement de ramener les roues toutes parallèles ($\bar{\beta} = 0$) et d'orienter la roue 1 à $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ pour éviter la singularité “les Δ_i ” sont toutes superposées” dans le cas des robots comportant 2 roues directrices ou $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont tous alignés (cette orientation des roues directrices est en effet généralement choisie

comme étant $\beta_1 = 0$). L'orientation finale des roues directrices peut cependant être réglée, voir Remarque 4.1.

Avant d'énoncer le Théorème 4.2, nous avons besoin d'introduire la définition suivante

Définition 4.1 Cône D

Définissons tout d'abord le vecteur

$$P_a = (1, 0, 0)^T \quad (4.9)$$

introduisons ensuite la constante $\tilde{\beta}_1$ comme suit :

$$\begin{aligned} \text{quand } n^{di} \geq 3 \quad \tilde{\beta}_1 &= \frac{\pi}{4} \iff \sigma = \sigma_1 \quad \text{où } \sigma_1 \text{ est défini par (4.11)} \\ \text{quand } n^{di} = 2 \quad \tilde{\beta}_1 &= \frac{\pi}{2} \quad \text{puisque la seule singularité est } {}^2\tilde{\mathcal{O}}_s \end{aligned}$$

Nous appelons cône D , le cône centré sur P_a et présentant un angle $\tilde{\beta}_1$

$$\text{cône } D : \quad \{P(\beta_1, \tilde{\beta}) \mid |(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{P_a})| < \tilde{\beta}_1\}$$

Ce cône est représenté sur la Figure 4.1. Par construction, il ne comporte aucune orientation des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_s . \square

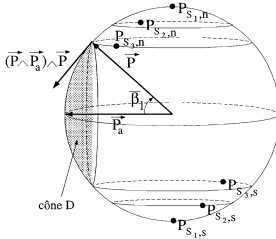


Figure 4.1: Le déplacement de $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ est enfermé dans le cône D .

Théorème 4.2 Retour d'état instationnaire cinématique

SOUS L'HYPOTHÈSE QUE

$$\text{à l'instant initial } t = t_0, P(\beta_1, \tilde{\beta}) \text{ appartient au cône } D \quad (4.10)$$

LES LOIS DE COMMANDE CINÉMATIQUE ν_i , DONNÉES PAR

$$\nu_1 = -P^T(\beta_1, \tilde{\beta}) R^T(\theta) \phi \quad (4.11)$$

ET (ν_2, ν_3) TELS QUE

$$\dot{P}(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3) = (P(\beta_1, \bar{\beta}) \wedge [g(t, \phi)\phi + hP_a]) \wedge P(\beta_1, \bar{\beta}) \quad (4.12)$$

où

$g(t, \phi)$ est une fonction scalaire C^1 périodique en temps, uniformément bornée pour la variable ϕ , et $g(t, \phi) \neq 0$

h est une constante positive vérifiant

$$h > \frac{g_{\max} \|\phi\|_{t=t_0}}{\sin \bar{\beta}_t} \quad \text{avec} \quad g_{\max} = \max_{t, \phi} (g(t, \phi)) \quad (4.13)$$

ASSURENT ϕ, β_1 et $\bar{\beta}$ sont bornés et convergent vers $(0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0)^T$ □

Preuve : L'idée centrale de la loi de commande proposée par le Théorème 4.2 est de garder le vecteur $P(\beta_1, \bar{\beta})$ dans un cône D dont l'angle $\bar{\beta}_t$ (voir Figure 4.1) est suffisamment petit pour que D ne renferme aucune des orientations singulières des roues directrices (le cas d'un robot comportant 3 roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés est représenté sur la Figure 4.1. Les points $P_{S_i, n}$ and $P_{S_i, s}$ ($1 \leq i \leq 3$) représentent les orientations des roues directrices pour lesquelles le CIR est sur S_i , situées respectivement dans les hémisphères nord et sud de la sphère unité. Ces 6 points contiennent $^3\check{O}_s$).

Montrons au préalable que la relation (4.12) définit pour toutes valeurs de ϕ, β_1 et $\bar{\beta}$ un unique couple (ν_2, ν_3) .

Par construction, voir (4.6), $P(\beta_1, \bar{\beta})$ est un vecteur astreint à se déplacer sur la sphère unité. Par conséquent, sa dérivée $\dot{P}(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3)$ doit appartenir nécessairement au plan tangent à la sphère unité au point $P(\beta_1, \bar{\beta})$. En utilisant les propriétés du produit vectoriel, on constate facilement que le terme de droite dans (4.12) a été construit de telle façon que cette condition soit satisfaite. La loi de commande donnée par le Théorème 4.2 a donc, comme attendu, un sens. La structure de la loi (4.12), et en particulier les rôles respectifs des 2 termes $g(t, \phi)\phi$ et hP_a apparaîtra plus clairement à la lecture de la preuve du Théorème 4.2 (voir le paragraphe suivant la fin de cette preuve).

Nous montrons maintenant comment ν_2 et ν_3 peuvent être facilement explicités depuis (4.12) : développons pour cela, le terme de gauche dans (4.12) à l'aide de (4.6). Nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} \cos \beta_1 \\ \cos \bar{\beta} \sin \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_2 + \begin{pmatrix} -\sin \bar{\beta} \sin \beta_1 \\ \sin \bar{\beta} \cos \beta_1 \\ \cos \bar{\beta} \end{pmatrix} \nu_3 = (P(\beta_1, \bar{\beta}) \wedge [g(t, \phi)\phi + hP_a]) \wedge P(\beta_1, \bar{\beta}) \quad (4.14)$$

Puisque $\beta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ (relation (4.3), ν_3 peut facilement être calculé à partir de la troisième ligne de (4.14). On obtient alors ν_2 en multipliant par $\cos \beta_1$ et $\sin \beta_1$ respectivement les lignes 1 et 2 puis en les sommant.

Nous donnons maintenant la preuve du Théorème 4.2 en 3 étapes

- *Étape 1 Les orientations singulières des roues directrices O_s ne sont jamais rencontrées ϕ , β_1 et $\tilde{\beta}$ sont bornés.*

La relation (4.10) assure que $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ appartient initialement au cône D . Tant que $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ reste dans ce cône, les orientations singulières des roues directrices ne sont pas rencontrées (Définition 4.1). La stabilité du système bouclé peut par conséquent être étudié classiquement à l'aide de fonctions de Lyapunov la dérivée de la fonction de Lyapunov $V = \frac{\phi^T \phi}{2}$, au vu de (4.5) et (4.11), s'écrit

$$\dot{V} = -\phi^T R^T(\theta) P(\beta_1, \tilde{\beta}) P^T(\beta_1, \tilde{\beta}) R(\theta) \phi \leq 0 \quad (4.15)$$

Cela assure que $\|\phi(t)\|$ décroît.

Supposons maintenant que $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ atteinte la limite du cône D , i.e.

$$|(\tilde{P}, \tilde{P}_a)| = \tilde{\beta}_l \quad (4.16)$$

Soient

$$q_1 = (P \wedge \phi) \wedge P \quad \text{and} \quad q_2 = (P \wedge P_a) \wedge P$$

Ces 2 vecteurs permettent de ré-écrire la loi de commande (4.12) comme

$$\dot{P}(\beta_1, \tilde{\beta}, \nu_2, \nu_3) = g(t, \phi) q_1 + h q_2 \quad (4.17)$$

En utilisant le fait que $\|P(\beta_1, \tilde{\beta})\| = 1$, on montre facilement que

$$|g(t, \phi)| \|q_1\| = |g(t, \phi)| \|\phi\| |\sin(\tilde{P}, \phi)| \leq g_{\max} \|\phi\|_{\max} \quad (4.18)$$

$$\text{et} \quad h \|q_2\| = h |\sin(\tilde{P}, \tilde{P}_a)| \quad (4.19)$$

Les 2 relations (4.18) et (4.19), la relation (4.13) relative à la constante h , et la décroissance de $\|\phi\|$, montrent clairement que lorsque $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ atteint la limite de D (i.e. quand nous avons (4.16)), l'inégalité suivante est vérifiée

$$h \|q_2\| > |g(t, \phi)| \|q_1\| \quad (4.20)$$

Des considérations géométriques simples montrent que $P \wedge P_a$ est le vecteur tangent au cercle limitant le cône D , et par conséquent que $q_2 = (P \wedge P_a) \wedge P$ est un vecteur perpendiculaire à la limite de D , dirigé vers l'intérieur du cône (voir Figure 4.1). On déduit alors de l'inégalité (4.20) et de la relation (4.17) que, sur la limite de D , $\dot{P}(\beta_1, \tilde{\beta}, \nu_2, \nu_3)$ est dirigé nécessairement vers l'intérieur du cône D . $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ ne peut par conséquent pas quitter D . Ce résultat termine la preuve de l'étape 1, puisqu'il assure que

les orientations singulières des roues directrices ne sont jamais rencontrées,

l'analyse de stabilité par approche Lyapunov peut par conséquent être menée tout au long du mouvement. On déduit alors de (4.15) que $\|\phi(t)\|$ est décroissante et bornée par $\|\phi\|_{t=t_0}$.

$\tilde{\beta}$ et β_1 sont inclus dans $] -\beta_l, \tilde{\beta}_l[$ et $[\frac{\pi}{2} - \tilde{\beta}_l, \frac{\pi}{2} + \tilde{\beta}_l[$ (puisque $P(\beta_1, \beta)$ reste dans D). β_1 et β sont donc eux aussi bornés. (On peut également en déduire que chaque composante de $\beta_{1,\dots,n}$ est bornée. La preuve est donnée à la Remarque 4.2). \square

• Etape 2 ϕ converge vers 0

Compte tenu des hypothèses faites sur la fonction $g(t, \phi)$ (voir Théorème 4.2), la loi de commande (4.12) est clairement périodique pour la variable t . Le principe d'invariance de LaSalle peut par conséquent être utilisé (voir [Yos66, Th 14.8]). Il assure, au vu de (4.15), que ϕ converge vers \mathcal{E} , le plus grand sous-espace invariant inclus dans

$$P^T(\beta_1, \bar{\beta})R(\theta)\phi = 0 \quad (4.21)$$

Les calculs suivants établissent que \mathcal{E} est réduit à $\phi = 0$.

Plaçons nous dans \mathcal{E} . En reportant (4.21) dans (4.11) puis dans (4.5), nous établissons facilement que

$$\nu_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = 0 \quad (4.22)$$

Dérivons maintenant 2 fois la relation (4.21). En utilisant (4.22), on montre que

$$\dot{P}^T(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3)R(\theta)\phi = 0 \quad (4.23)$$

$$\ddot{P}^T(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3, \dot{\nu}_2, \dot{\nu}_3)R(\theta)\phi = 0 \quad (4.24)$$

Soit u défini par

$$u = g(t, \phi)\phi + hP_a \quad (4.25)$$

La loi de commande (4.12) peut alors être ré-écrite comme

$$\dot{P}(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3) = (P(\beta_1, \bar{\beta}) \wedge u) \wedge P(\beta_1, \bar{\beta}) \quad (4.26)$$

Nous développons maintenant (4.24) en utilisant (4.26)

$$\ddot{P}^T R(\theta)\phi = [(\dot{P} \wedge u) \wedge P]^T R(\theta)\phi + [(P \wedge \dot{u}) \wedge P]^T R(\theta)\phi + [(P \wedge u) \wedge \dot{P}]^T R(\theta)\phi = 0 \quad (4.27)$$

Par définition du produit vectoriel, $(\dot{P} \wedge u) \wedge P$ est perpendiculaire à $(\dot{P} \wedge u)$ et à P . De plus, puisque P est un vecteur se déplaçant sur une sphère, P et \dot{P} sont perpendiculaires. En combinant ces 2 conclusions, nous en déduisons que

$$(\dot{P} \wedge u) \wedge P = k_1 \dot{P} \quad \text{avec } k_1 \text{ un scalaire.} \quad (4.28)$$

On montre de la même manière que

$$(P \wedge \dot{u}) \wedge P = k_2 P \quad \text{avec } k_2 \text{ un scalaire.} \quad (4.29)$$

En reportant finalement (4.28) et (4.29) dans (4.27), et en utilisant (4.21) et (4.23), nous obtenons que

$$\text{dans } \mathcal{E} \quad \ddot{P}^T R(\theta)\phi = [(P \wedge \dot{u}) \wedge P]^T R(\theta)\phi \quad (4.30)$$

Développons maintenant (4.30) en utilisant (4.25)

$$\ddot{P}^T R\phi = \frac{\partial g(t, \phi)}{\partial t} [(P \wedge \phi) \wedge P]^T R\phi + \frac{\partial g(t, \phi)}{\partial \phi} \dot{\phi} [(P \wedge \phi) \wedge P]^T R\phi + g(t, \phi) [(P \wedge \phi) \wedge P]^T R\phi = 0 \quad (4.31)$$

Au vu de (4.22), la relation (4.31) se réduit en fait à

$$\frac{\partial g(t, \phi)}{\partial t} [(P \wedge \phi) \wedge P]^T R \phi = 0 \quad (4.32)$$

Les hypothèses faites sur la fonction $g(t, \phi)$ assurent que

$$\forall T \quad \exists t_2 > t_1 > T \quad / \quad \frac{\partial g(t, \phi)}{\partial t} \neq 0 \quad \text{sur } [t_1, t_2] \quad (4.33)$$

En reportant (4.33) dans (4.32), nous en déduisons que

$$\text{sur les intervalles } [t_1, t_2] \quad [(P \wedge \phi) \wedge P]^T R(\theta) \phi = 0 \quad (4.34)$$

La partie calculatoire de la preuve de l'étape 2 est alors terminée. En effet, nous venons de prouver (relations (4.6), (4.21) et (4.34)) que

$$\text{dans } \mathcal{E} \quad \forall T, \quad \exists t_2 > t_1 > T \quad / \quad \text{sur } [t_1, t_2] \quad \begin{cases} P^T(\beta_1, \tilde{\beta}) R(\theta) \phi = 0 \\ [(P(\beta_1, \tilde{\beta}) \wedge \phi) \wedge P(\beta_1, \tilde{\beta})]^T R(\theta) \phi = 0 \\ P^T(\beta_1, \tilde{\beta}) \neq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Les vecteurs $[(P \wedge \phi)] \wedge P$ et P étant perpendiculaires par définition du produit vectoriel, on déduit immédiatement de la relation (4.35) que

$$\text{dans } \mathcal{E} \forall T, \quad \exists t_2 > t_1 > T \quad / \quad \text{sur } [t_1, t_2] \quad \phi = 0 \quad (4.36)$$

Enfin, puisque sur \mathcal{E} , $\dot{\phi} = 0 \quad \forall t$ (relation (4.22)), nous concluons, au vu de (4.36), que la seule courbe intégrale incluse dans \mathcal{E} est

$$\forall t \quad \phi = 0$$

Cela termine la preuve de l'étape 2.

• *Etape 3* $\tilde{\beta}$ converge vers 0, et β_1 converge vers $\frac{\pi}{2}$

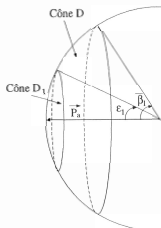
Ce résultat est intuitif l'étape 2 ayant montré que ϕ converge vers 0, la loi de commande (4.12), au vu de (4.17), se réduit lorsque t approche l'infini à

$$\dot{P}(\beta_1, \tilde{\beta}, \nu_2, \nu_3) = h \, q_2$$

Au vu de la direction du vecteur q_2 (voir Figure (4.1)), il est clair que cette loi de commande tend, pour t approchant l'infini, à superposer $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ et P_a , ce qui implique, au vu de (4.9) et (4.6), que $\tilde{\beta}$ et β_1 convergent respectivement vers 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La preuve rigoureuse est cependant un peu plus complexe introduisons sur le modèle du cône D , un cône D_1 caractérisé par (voir Figure 4.2)

$$|(\tilde{P}, \tilde{P}_a)| < \varepsilon_1$$

Figure 4.2: Cône D_1

Modifions légèrement l'inégalité (4.18) et gardons l'inégalité (4.19) telle quelle

$$|g(t, \phi)| \|q_1\| = |g(t, \phi)| \|\phi\| |\sin(\widehat{P, \phi})| \leq g_{\max} \|\phi\| \quad (4.37)$$

$$h \|q_2\| = h |\sin(\widehat{P, P_a})| \quad (4.38)$$

L'étape 2 ayant prouvé que ϕ converge vers 0, nous pouvons écrire que

$$\forall \varepsilon_1, \quad \exists t^* / \forall t > t^* \quad \|\phi\| < \frac{h \sin \varepsilon_1}{g_{\max}} \quad (4.39)$$

En reportant (4.37) et (4.38) dans (4.39), nous en déduisons que

$$\forall \varepsilon_1, \quad \exists t^* / \forall t > t^* \quad (h \|q_2\| > |g(t, \phi)| \|q_1\| \text{ if } P(\beta_1, \tilde{\beta}) \in D \setminus D_1) \quad (4.40)$$

Au vu de la direction du vecteur q_2 (voir étape 1 et Figure 4.1), la relation (4.40) montre clairement qu'il existe un instant t_1 tel que

$$\forall \varepsilon_1 \quad \exists t_1 \geq t^* / \forall t > t_1 \quad P(\beta_1, \tilde{\beta}) \in D_1$$

La preuve de l'étape 3 est alors terminée puisque ε_1 peut être choisi arbitrairement petit, $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ converge vers P_a , et donc, en utilisant (4.9) et (4.6), $\tilde{\beta}$ and β_1 convergent respectivement vers 0 et $\frac{\pi}{2}$. \triangleleft

La construction de la loi de commande (4.12), a priori surprenante, est maintenant claire le rôle du terme q_2 est de garantir que les orientations singulières des roues directrices ne sont pas rencontrées, alors que celui du terme q_1 est de garantir que ϕ tende vers 0.

Nous présentons maintenant plusieurs remarques sur la loi proposée par le Théorème 4.2

Remarque 4.1 Modifications des valeurs finales de β_1 et β

La loi de commande proposée par le Théorème 4.2 assure que l'orientation des roues directrices converge asymptotiquement vers celle repérée par $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = 0$ (c'est-à-dire, au vu de (4.3), roues directrices toutes parallèles, la roue 1 présentant un angle $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$). Cette orientation finale peut être modifiée très facilement, en utilisant dans (4.12) un vecteur \vec{P}_a autre que celui donné par (4.9). \square

Détails : L'étape 3 de la preuve du Théorème 4.2 montre que le vecteur $P(\beta_1, \beta)$ converge asymptotiquement vers le vecteur P_a quel qu'il soit. C'est par conséquent ce dernier, et ce dernier seulement, qui détermine les valeurs finales de β_1 et β . La preuve du Théorème 4.2 ne fait apparaître aucune restriction sur le choix de \vec{P}_a , excepté que $\vec{P}_a \notin \vec{\mathcal{O}}_s$ ou $\vec{P}_a \notin \vec{\mathcal{O}}_s$. Cependant, plus \vec{P}_a est proche d'un élément de ${}^2\vec{\mathcal{O}}_s$ ou ${}^3\vec{\mathcal{O}}_s$, plus le cône D , Définition 4.1, doit présenter une ouverture au centre faible afin de ne pas contenir de singularité. Cela restreint d'autant les mouvements instantanés possibles pour le robot (puisque par construction, $P(\beta_1, \beta) \in D$ tout au long du déplacement).

Puisque le point diamétralement opposé à un élément de ${}^2\vec{\mathcal{O}}_s$ ou ${}^3\vec{\mathcal{O}}_s$ est également un élément de ${}^2\vec{\mathcal{O}}_s$ ou ${}^3\vec{\mathcal{O}}_s$, le plan équatorial $\beta = 0$ apparaît comme étant celui le plus éloigné de l'ensemble des singularités. C'est pour cette raison que dans le Théorème 4.2, nous avons proposé de prendre \vec{P}_a dans ce plan. Nous avons choisi plus spécialement la valeur finale de β_1 égale à $\frac{\pi}{2}$, afin d'être le plus éloigné possible du cercle formé par les points de ${}^2\vec{\mathcal{O}}_s$. \triangleleft

Remarque 4.2 L'orientation β_i , ($1 \leq i \leq n^d$) de chacune des roues directrices reste bornée

La loi de commande proposée par le Théorème 4.2 assure que l'orientation β_i ($1 \leq i \leq n^d$) de chacune des roues directrices reste bornée tout au long du déplacement du robot. \square

Détails : Dans la preuve du Théorème 4.2, nous avons montré que les variables β_1 et β restent toutes 2 bornées lors du déplacement du robot. Il est important de s'assurer également que l'orientation β_i ($1 \leq i \leq n^d$) de chacune des roues directrices reste elle-aussi bornée lors du déplacement du robot. En effet, dans la pratique, les roues directrices sont parfois montées sur le châssis de telle façon qu'il leur est impossible de faire plus d'une rotation sur elles-mêmes.

Dans le cas des robots ne comportant que 2 roues directrices ou $n^d \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont tous alignés, la preuve est immédiate. En effet, supposons que l'orientation du repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ ait été choisie de telle sorte que l'orientation singulière des roues directrices correspondant à toutes les droites Δ_i , superposées, soit repérée par $\beta_1 = \dots = \beta_{n^d} = 0 [\pi]$. Alors, toute orientation de la roue i ($1 \leq i \leq n^d$) telle que $\beta_i = 0 [\pi]$ est singulière : elle est en effet associée soit à un CIR confondu avec $S_{j, (1 \leq j \leq n^d)}$, soit à la situation où toutes les droites $\Delta_{i, (1 \leq i \leq n^d)}$ sont superposées (cf. Proposition 2.13). Or, toutes ces orientations appartiennent à $\vec{\mathcal{O}}_s$ (Définition 2.11).

La loi de commande proposée par le Théorème 4.2 garantissant que les singularités sont

évités lors du déplacement du robot, nous en déduisons que toutes les orientations β_i , ($1 \leq i \leq n^{\text{di}}$) sont confinées soit dans $] -\pi, 0]$, soit dans $[0, \pi[$. Elles sont donc toutes bornées.

Le cas des robots équipés de $n^{\text{di}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, nécessite plus de calculs. Nous montrons ci-dessous que

$$\forall i, \quad 2 \leq i \leq n^{\text{di}} \quad \text{La loi de commande proposée par le Théorème 4.2 assure que } \beta_i \neq -\alpha_i \quad [\pi] \quad (4.41)$$

L'évolution des différentes orientations $\beta_i(t)$ étant C^∞ (cf. relation (2.61)), nous déduisons de (4.41) que chaque variable β_i , ($2 \leq i \leq n^{\text{di}}$) reste enfermée dans un intervalle de longueur π et est par conséquent bornée.

Le Théorème 4.2 assure que, durant tout le déplacement du robot, le vecteur $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ ne quitte pas le cône D . Nous montrons successivement que, pour toutes les orientations où les roues directrices sont parallèles, puis pour toutes les autres, la relation (4.41) est satisfaite.

Cas où toutes les roues directrices sont parallèles dans ce cas, l'orientation de la roue 1 est donnée par (voir par exemple (E.11))

$$\beta_{i, (2 \leq i \leq n^{\text{di}})} = -\alpha_i + \beta_1 \quad (4.42)$$

Puisque $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ ne quitte pas le cône D , nous avons

$$\beta_1 \in]\frac{\pi}{2} - \tilde{\beta}_1, \frac{\pi}{2} + \tilde{\beta}_1[\quad (4.43)$$

En reportant (4.42) dans (4.43), nous en déduisons que

$$\beta_i \in]-\alpha_i + \frac{\pi}{2} - \tilde{\beta}_1, -\alpha_i + \frac{\pi}{2} + \tilde{\beta}_1[\quad \forall i \in \{2, \dots, n^{\text{di}}\} \quad (4.44)$$

Enfin, puisque par définition $\tilde{\beta}_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, nous déduisons de (4.44) que la relation (4.41) est satisfaite lorsque l'on ne considère que les orientations des roues directrices où celles-ci sont toutes parallèles.

Cas où les roues directrices ne sont pas toutes parallèles Au vu de la Proposition 2.20, les coordonnées $(\tilde{\zeta}_x, \tilde{\zeta}_y)$ du CIR dans le repère $[S_1, \vec{i}, \vec{j}]$ vérifient

$$\tilde{\zeta}_x = \frac{\cos \beta_1}{\sigma} = \frac{\cos \beta_1}{\tan \beta} \quad (4.45)$$

$$\tilde{\zeta}_y = \frac{\sin \beta_1}{\sigma} = \frac{\sin \beta_1}{\tan \beta} \quad (4.46)$$

(les roues directrices n'étant pas toutes parallèles, σ et β sont tous 2 non nuls, les relations (4.45) et (4.46) ont donc un sens). Puisque $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ reste dans le cône D , les inégalités suivantes sont satisfaites (relation (4.6))

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\beta} \sin \beta_1 &> \cos \tilde{\beta}_1 \\ |\cos \tilde{\beta} \cos \beta_1| &< \sin \tilde{\beta}_1 \\ |\sin \beta| &< \sin \tilde{\beta}_1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

En reportant (4.47) dans (4.46), nous en déduisons que

$$|\bar{\zeta}_y| > \frac{\cos \beta_l}{|\sin \bar{\beta}|} \quad (4.48)$$

Puisque $P(\beta_l, \bar{\beta})$ ne quitte pas le cône D , nous pouvons également écrire que

$$\bar{\beta} \in] - \bar{\beta}_l, \bar{\beta}_l[\quad (4.49)$$

En reportant (4.49) dans (4.48), nous concluons que

$$|\bar{\zeta}_y| > \frac{1}{\tan \bar{\beta}_l} \quad (4.50)$$

ou encore, compte tenu de la définition de β_l (Définition 4.1)

$$|\bar{\zeta}_y| > \max_{(2 \leq i \leq n^{\Delta})} l_i \quad (4.51)$$

En définitive, le long de tous les déplacements du robot, l'évolution du *CIR* est contrainte par

$$\begin{cases} \beta_1 \in]\frac{\pi}{2} - \bar{\beta}_l, \frac{\pi}{2} + \bar{\beta}_l[\\ |\bar{\zeta}_y| > \max_{i, (2 \leq i \leq n)} l_i \end{cases} \quad (4.52)$$

La zone, notée Z , dans laquelle le *CIR* peut évoluer est hachurée sur la Figure 4.3.

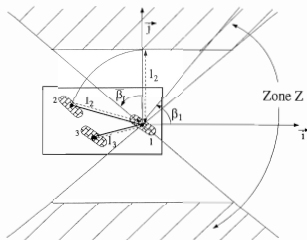


Figure 4.3: Possibilité d'évolution du *CIR* lorsque $P(\beta_l, \bar{\beta})$ reste dans D

Nous prouvons maintenant par l'absurde que $\beta_{i, (2 \leq i \leq n^{\Delta})} \neq -\alpha_i$ supposons que $\beta_i = -\alpha_i$. Au vu de la définition des angles α et β donnée page 15, cela signifie que Δ_i est

parallèle à \vec{x} (voir Figure 4.3). Le CIR, Proposition 2.13, appartient à cette droite. Or cette dernière ne coupe pas la zone Z . Par conséquent, la relation (4.41) est satisfaite également dans le cas où les roues directrices ne sont pas toutes parallèles. Cela termine la preuve de la Remarque 4.2. \triangleleft

Remarque 4.3 *Contraintes sur la fonction $g(t, \phi)$*

Dans l'énoncé du Théorème 4.2, nous avons imposé à la fonction $g(t, \phi)$ d'être périodique en temps. Cette exigence peut être légèrement relâchée. Plus précisément, elle peut être remplacée par

(i) $g(t, \phi)$ est uniformément bornée par rapport à t , de même que toutes ses dérivées,

(ii) $\frac{\partial g(t, \phi)}{\partial t} \not\rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. \square

Détails : Ce nouveau jeu de contraintes sur $g(t, \phi)$ a été proposé initialement dans [Sam90]. Comme il modifie peu la preuve du Théorème 4.2, nous ne donnons ci-dessous que les grandes lignes de celle-ci.

$g(t, \phi)$ n'apparaît pas dans la première étape de la preuve du Théorème 4.2. Celle-ci reste donc inchangée. Par contre, au début de la preuve de la deuxième étape, $g(t, \phi)$ n'étant plus périodique en temps, nous ne pouvons plus utiliser le Théorème de LaSalle et affirmer que le système bouclé converge vers le plus grand sous-espace invariant inclus dans (4.21). Cette partie de la preuve peut cependant être remplacée par le raisonnement suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} V \text{ est minorée par } 0 & (\text{par construction}) \\ \dot{V} \leq 0 & (\text{grâce à la commande (4.15)}) \\ \dot{V} \text{ est bornée} & (\text{au vu de la bornitude de l'état} \\ & \text{étape 1 et de (i)}) \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Les relations (4.53) assurent, Théorème de Barbalat, que

$$\dot{V} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

En suivant de nouveau la preuve de l'étape 2, nous montrons que

$$\dot{V} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \xRightarrow{(i)} \ddot{P}^T \phi \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \xRightarrow{(n)} \phi \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Enfin, l'étape 3 de la preuve du Théorème 4.2, puisqu'elle est purement géométrique, reste également inchangée. \triangleleft

4.2.2.c Synthèse d'une loi instationnaire partiellement dynamique

Sous les Hypothèses que les paramètres inertiels du système sont connus (Hypothèse 2.7) et que le système est complètement actionné (Hypothèse 2.8), le modèle dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 se présente (Théorème 2.10) sous la forme du modèle cinématique,

étendu par 3 intégrateurs portant sur les degrés de liberté cinématique, c'est-à-dire, si l'on se base sur le modèle cinématique (4.5)

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = v_1 \\ \dot{\nu}_2 = v_2 \\ \dot{\nu}_3 = v_3 \\ \dot{\phi} = R^{-1}(\theta).P(\beta_1, \bar{\beta})\nu_1 \\ \dot{\beta}_1 = \nu_2 \\ \dot{\bar{\beta}} = \nu_3 \end{cases} \quad (4.54)$$

Au vu de la signification physique de η_1 , η_2 et η_3 (Théorème 2.13) et des relations (4.4), les degrés de liberté cinématique ν_1 , ν_2 et ν_3 peuvent être interprétés comme

ν_1 degré de liberté cinématique relié à la vitesse linéaire de la roue 1

ν_2 et ν_3 degrés de liberté cinématique reliés à la vitesse du *CIR* dans le plan d'évolution, c'est-à-dire (cf. relation (2.61)) relié à la vitesse d'orientation de chacune des roues directrices.

Il en découle que les commandes auxiliaires v_1 , v_2 et v_3 présentent la signification suivante

v_1 : commande représentant les couples entraînant en rotation les roues directrices,

v_2 et v_3 : commandes représentant les couples orientant les roues directrices.

Dans cette section, nous montrons que la loi de retour d'état instationnaire cinématique proposée à la section 4.3.2.b peut être facilement convertie en une loi de retour d'état instationnaire partiellement dynamique. Le terme "partiellement" signifie que nous ne proposons pas une loi de commande pour le véritable modèle dynamique (4.54), mais pour le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = v_1 \\ \dot{\phi} = R^{-1}(\theta).P(\beta_1, \bar{\beta})\nu_1 \\ \dot{\beta}_1 = \nu_2 \\ \dot{\bar{\beta}} = \nu_3 \end{cases} \quad (4.55)$$

où le vecteur de commande est $(v_1, \nu_2, \nu_3)^T$

Au vu de la signification des variables ν_1 et ν_i , le modèle partiellement dynamique rend compte de l'inertie générale du robot, puisque le déplacement du robot est commandé via v_1 qui présente la dimension d'un couple. Par contre, l'inertie propre aux roues est négligée, puisque l'on commande leur orientation via ν_2 et ν_3 qui présentent la dimension d'une vitesse. Le modèle (4.55), sans décrire parfaitement le comportement du robot comme le modèle (4.54), est déjà très réaliste. Dans les cas où la masse des roues est faible par rapport à la masse totale du robot et où les moteurs commandant l'orientation des roues directrices sont très rapides, le modèle partiellement dynamique peut même être considéré comme très satisfaisant. La loi de retour d'état instationnaire partiellement

dynamique donnée au Théorème 4.3 ci-dessous est donc, dans de très nombreux cas, directement implémentable. Nous nous sommes limités à une loi partiellement dynamique, car la construction des lois cinématiques ν_2 et ν_3 étant complètement géométrique, leur conversion en lois dynamiques est loin d'être immédiate.

Pour convertir la loi cinématique ν_1 en une loi dynamique, nous utilisons la technique des systèmes en cascades, présentée initialement dans [PAC91], et étendue au cas des retours d'état instationnaires dans [CA92]. Cette technique propose une méthode systématique pour convertir en loi dynamique, une loi cinématique qui a été construite à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

La loi cinématique ν_1 , proposée par le Théorème 4.2 (relation (4.11)), est construite sur la base de la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{\phi^T \phi}{2} \quad (4.56)$$

Nous notons désormais ν_1 , la loi de commande cinématique, i.e. (relation (4.11))

$$\bar{\nu}_1 = -P^T(\beta_1, \bar{\beta})\phi$$

Pour le modèle partiellement dynamique (4.55), $\bar{\nu}_1$ apparaît comme la trajectoire idéale pour la nouvelle variable d'état ν_1 . La technique des systèmes en cascade consiste à ajouter à la fonction de Lyapunov initiale, un terme représentant la différence entre ν_1 et $\bar{\nu}_1$, de façon à forcer la convergence du premier vers le second. Soit $\tilde{\nu}_1$ défini par

$$\tilde{\nu}_1 = \nu_1 - \bar{\nu}_1 \quad (4.57)$$

Nous considérons maintenant la fonction de Lyapunov V_1 (avec V donné par (4.56))

$$V_1 = V + \frac{\tilde{\nu}_1^2}{2} \quad (4.58)$$

La dérivée de (4.58) s'écrit .

$$\dot{V}_1 = \nu_1 P^T(\beta_1, \bar{\beta}) R(\theta) \phi + \dot{\tilde{\nu}}_1 \tilde{\nu}_1 \quad (4.59)$$

En utilisant (4.11) et (4.55), on montre facilement que

$$\dot{\tilde{\nu}}_1 = -\dot{P}^T(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3) R(\theta) \phi - P^T(\beta_1, \bar{\beta}) \dot{R}(\theta) \phi \sin \bar{\beta} \nu_1 - P^T(\beta_1, \bar{\beta}) P(\beta_1, \bar{\beta}) \nu_1 - \nu_1 \quad (4.60)$$

On vérifie facilement, en utilisant (4.59) et (4.60), que la loi de commande donnée ci-dessous (relation (4.61)) (avec Λ une matrice positive définie symétrique)

$$\begin{aligned} \nu_1 = & -\dot{P}^T(\beta_1, \bar{\beta}, \nu_2, \nu_3) R(\theta) \phi - P^T(\beta_1, \bar{\beta}) \dot{R}(\theta) \phi \sin \bar{\beta} \nu_1 - P^T(\beta_1, \bar{\beta}) P(\beta_1, \bar{\beta}) \nu_1 + \\ & \cdot \Lambda \tilde{\nu}_1 - P^T(\beta_1, \bar{\beta}) R(\theta) \phi \end{aligned} \quad (4.61)$$

conduit à

$$\dot{V}_1 = -\Lambda \tilde{\nu}_1^2 - \phi^T R^T(\theta) P(\beta_1, \bar{\beta}) P^T(\beta_1, \bar{\beta}) R^T(\theta) \phi \leq 0$$

et donc assure la bornitude de ν_1 et de ϕ .

En conclusion, l'étape 1 de la preuve du Théorème 4.2 peut être conduite de la même façon avec un modèle partiellement dynamique si la loi de commande (4.11) est remplacée par (4.61), la fonction de Lyapunov V est remplacée par V_1 , et les lois de commandes (4.12) gardées telles quelles. Dans l'étape 2, le principe d'invariance de LaSalle assure cette fois que le vecteur d'état du modèle partiellement dynamique (4.55) converge vers le plus grand sous-espace invariant inclus dans

$$\begin{cases} P^T(\beta_1, \tilde{\beta})R(\theta)\phi = 0 \\ \nu_1 = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

La méthode développée dans cette étape 2 permet de montrer que le plus grand sous-espace invariant inclus dans (4.62) est en fait réduit à

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ \nu_1 = 0 \end{cases}$$

Enfin, la preuve de l'étape 3 reste inchangée puisqu'elle ne dépend que de la loi de commande (4.12).

Théorème 4.3 Loi de retour d'état instationnaire partiellement dynamique

SOUS L'HYPOTHÈSE QUE

à l'instant initial $t = t_0$, $P(\beta_1, \tilde{\beta})$ appartient au cône D

LES LOIS DE COMMANDE ν_1 , ν_2 ET ν_3 , DONNÉES PAR

$$\begin{aligned} \nu_1 = & -\dot{P}^T(\beta_1, \tilde{\beta}, \nu_2, \nu_3)R(\theta)\phi - P^T(\beta_1, \tilde{\beta})\dot{R}(\theta)\phi \sin \beta \nu_1 - P^T(\beta_1, \tilde{\beta})P(\beta_1, \tilde{\beta})\nu_1 + \\ & \cdot \Lambda \tilde{\nu}_1 - P^T(\beta_1, \tilde{\beta})R(\theta)\phi \end{aligned}$$

ET (ν_2, ν_3) TELS QUE :

$$\dot{P}(\beta_1, \tilde{\beta}, \nu_2, \nu_3) = (P(\beta_1, \tilde{\beta}) \wedge [g(t, \phi)\phi + hP_s]) \wedge P(\beta_1, \tilde{\beta})$$

où :

- $g(t, \phi)$ est une fonction scalaire C^1 périodique en temps, uniformément bornée pour la variable ϕ , et $g(t, \phi) \not\equiv 0$

h est une constante positive vérifiant

$$h > \frac{g_{\max} \|\phi\|_{t=t_0}}{\sin \tilde{\beta}_l} \quad \text{avec} \quad g_{\max} = \max_{t, \phi} (g(t, \phi))$$

ASSURENT ν_1, ϕ, β_1 et $\tilde{\beta}$ sont bornés et convergent vers $(0, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0)^T$ □

Preuve : La preuve du Théorème 4.3 est immédiate au vu de du Théorème 4.2 et de la relation (4.61).

4.2.2.d Résultats de simulation

Dans cette section, nous avons simulé le modèle cinématique (2.67) d'un robot comportant 3 roues directrices dont les centres, distants de 1 m les uns des autres, ne sont pas alignés. Nous avons par conséquent (Définition 4.1)

$$\dot{\beta}_1 = \frac{\pi}{2} \quad (4.63)$$

Le seul degré de liberté dans la loi de commande proposée par le Théorème 4.2 est la fonction dépendante du temps $g(t, \phi)$. Les techniques présentées à la section 4.3.3 pour rendre exponentielle la vitesse de convergence d'un retour d'état instationnaire, ne peuvent pas être appliquées pour la loi proposée par le Théorème 4.2. Après différentes simulations, nous avons retenu la fonction suivante

$$g(t, \phi) = \frac{\sin t}{\sqrt{\|\phi\|^2 + 1.10^{-6}}} \quad (4.64)$$

qui est une approximation C^∞ de

$$g(t, \phi) = \frac{\sin t}{\|\phi\|}$$

De cette manière, le produit $g(t, \phi)\phi$ garde une amplitude constante tout le long du déplacement du robot. Pour illustrer l'importance de ce point, rappelons les relations (4.17), (4.18) et (4.19)

$$\dot{P}(\beta, \beta_1, v, v_1) = g(t, \phi)q_1 + hq_2 \quad (4.65)$$

$$|g(t, \phi)| \|\phi\| = |g(t, \phi)| \|\phi\| |\sin(\widehat{P, \phi})| \quad (4.66)$$

$$h \|\phi\| = h |\sin(\widehat{P, P_s})| \quad (4.67)$$

Puisque $g(t, \phi)\phi$, grâce au choix (4.64), présente une amplitude constante, le poids relatif dans (4.65) de $g(t, \phi)q_1$, (donné par (4.66)), et de hq_2 , (donné par (4.67)), est semblable tout au long du déplacement du robot. Par conséquent, la convergence de ϕ vers 0, obtenue grâce au terme $g(t, \phi)q_1$ (voir le paragraphe placé à la fin de la preuve du Théorème 4.2), n'est pas désavantagée par rapport à la convergence de β_1 et de β vers leur valeur finale, obtenue grâce au terme hq_2 .

Nous en déduisons la valeur de la constante h au vu de (4.13), (4.64) et (4.63), nous avons

$$h = \sqrt{2}$$

Pour finir, plusieurs simulations nous ont montré qu'en prémultipliant la loi de commande v_1 , donnée par (4.11), par la fonction dépendante du temps $k(t) = 2.5(1 + \cos t)$, et les lois de commande v_2 et v_3 , données par (4.12), par la constante 10, la vitesse de convergence de la loi de commande était significativement améliorée.

les Figures 4.4 à 4.10 décrivent une première simulation pour laquelle les conditions initiales sont

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \beta_{1,0} \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La **Figure 4.4** présente la trajectoire cartésienne du point S_1 , centre de la roue 1. Cette trajectoire est très semblable à celle obtenue par d'autres lois de retour d'état instationnaires, voir [Sam93] ou [PTBC92] : le robot oscille le long du chemin le plus naturel qui amènerait le robot vers le point visé. On note qu'avec la fonction $g(t, \phi)$ proposée par (4.64), la convergence du robot peut être considérée comme atteinte en 3 oscillations.
- La **Figure 4.5** présente la même trajectoire cartésienne, mais le vecteur \vec{r} a été dessiné de manière à représenter l'orientation du châssis le long du déplacement du robot. Cette figure montre que θ converge de façon presque monotone vers 0, en dépit des nombreuses oscillations du robot. En d'autres termes, la convergence de l'orientation du châssis semble être indépendante de celle de x et y . Ce résultat est important d'un point de vue pratique, car il montre que la charge du robot ne sera pas secouée lors du déplacement.
- La **Figure 4.6** présente l'évolution de x , y et θ en fonction du temps. Elle met en évidence que la convergence de ces 3 variables est obtenue dans le délai raisonnable de 30 secondes.
- La **Figure 4.7** présente l'évolution des variables représentant l'orientation des roues, i.e. β_1 et β en fonction du temps. Comme attendu, $\beta \in]-\beta_1, \beta_1[=]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et $\beta_1 \in]\frac{\pi}{2} - \beta_1, \frac{\pi}{2} + \beta_1[=]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$, ce qui illustre bien que $P(\beta_1, \beta)$ ne quitte pas le cône D . On note cependant que, contrairement à la vitesse de convergence de ϕ , celle de β et de β_1 est très lente. En fait, ces 2 variables ne commencent à converger que lorsque la convergence de ϕ vers sa valeur finale a été obtenue. En changeant le gain instationnaire $g(t, \phi)$, c'est-à-dire en changeant le poids relatif des 2 termes $g(t, \phi)\phi$ et $h\phi_2$ dans la loi de commande (4.12), la vitesse de convergence de β et de β_1 peut être significativement améliorée, mais alors, ce serait ϕ qui convergerait lentement. Construire un gain instationnaire $g(t, \phi)$ qui assure la même vitesse de convergence rapide pour ϕ et (β, β_1) reste un problème ouvert.
- La **Figure 4.8** présente l'évolution des 3 angles β_i en fonction du temps. Elle montre que, comme attendu, chaque β_i reste borné.
- La **Figure 4.9** présente les commandes envoyées sur les moteurs contrôlant l'orientation des roues directrices, c'est-à-dire les vitesses d'orientation de chacune des roues $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$ et $\dot{\beta}_3$. On note qu'elles sont toutes bornées par 1 rd.s^{-1} , ce qui est acceptable dans le cadre d'une application pratique.
- La **Figure 4.10** présente la commande cinématique v_1 , reliée à la vitesse linéaire de la roue 1 par (4.4). Au vu de cette courbe, et sur la base de roues de 10 cm, la vitesse de rotation de la roue 1 serait bornée par $\sqrt{2} \cdot 0.5 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui est également une valeur acceptable dans le cadre d'une application pratique.

Les Figures 4.11 à 4.12 correspondent chacune à une simulation différente

- **Figure 4.11** Dans cette simulation, l'orientation initiale a été choisie nulle, c'est-à-dire, le robot est orienté comme il doit l'être, par contre S_1 ne se trouve pas à sa localisation finale. Une constatation intéressante d'un point de vue pratique, est que θ et β restent à zéro tout au long du déplacement du robot

Le robot et sa charge ne tournent pas, les roues restent parallèles, la convergence de S_1 vers O est obtenue uniquement grâce à une rotation concertée des roues directrices.

Cela illustre une nouvelle fois que θ converge presque indépendamment de x et y . Les observations de cette simulation peuvent être retrouvées par le calcul puisque $\beta_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$, la troisième composante de $\dot{P}(\beta_{1,0}, \beta_0, \nu_2, \nu_3)$ est nécessairement nulle. En effet :

$$\dot{P} = (P \wedge (g\phi + h P_a)) \wedge P = \left(\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

En reportant ce résultat dans (4.14), nous en déduisons que, quand $\theta_0 = \beta_0 = 0$

$$\nu_3 = \dot{\beta}_0 = 0 \quad (4.69)$$

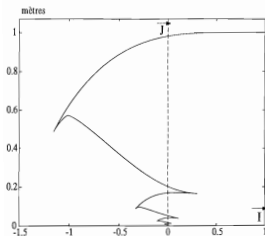
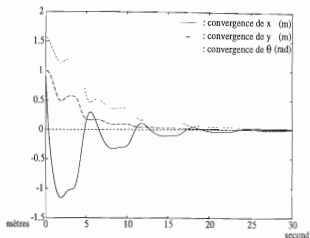
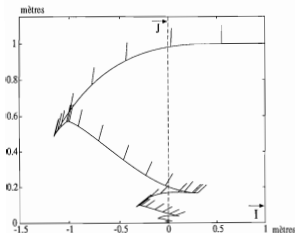
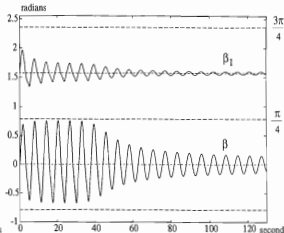
En reportant maintenant (4.69) dans (4.5), nous obtenons

$$\dot{\theta}_0 = \nu_1 \sin \beta_0 = 0 \quad (4.70)$$

En reportant enfin (4.69) et (4.70) dans (4.68), il apparaît clairement que θ and β restent égaux à zéro tout au long du déplacement du robot.

- **Figure 4.12** Dans cette dernière simulation, le robot est initialement en O , mais avec une mauvaise orientation θ . Cette simulation met en évidence que la convergence de θ n'est pas complètement indépendante de la convergence de x et y . en effet, le robot s'éloigne de O pour se ré-orienter. Ce résultat était attendu, car le seul mouvement qui aurait permis au robot d'amener θ à 0 sans que S_1 ne quitte O , est la rotation autour d'un CIR confondu avec S_1 . Or, l'orientation des roues directrices permettant ce mouvement, est l'une des orientations de \mathcal{O}_s .

Conditions initiales : $x=1\text{m}, y=1\text{m}, \theta = \frac{\pi}{2}$
 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \bar{\beta} = 0$

Figure 4.4: Trajectoire de S_1 Figure 4.6: Evolution de x, y et θ Figure 4.5: Trajectoire de S_1 , la barre indique \vec{v} Figure 4.7: Evolution de β_1 and $\bar{\beta}$

Conditions initiales : $x=1\text{m}, y=1\text{m}, \theta = \frac{\pi}{2}$
 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$

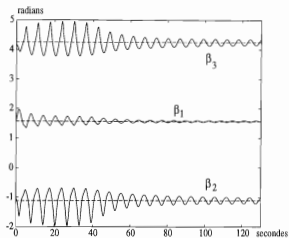


Figure 4.8: Evolution de β_1, β_2 et β_3

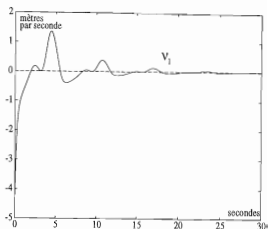


Figure 4.10: Evolution de ν_1

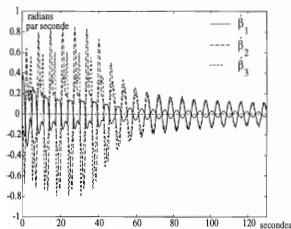


Figure 4.9: Evolution de $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ et $\dot{\beta}_3$

Conditions initiales :

$$x=1\text{m}, y=1\text{m}, \theta=0$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$$

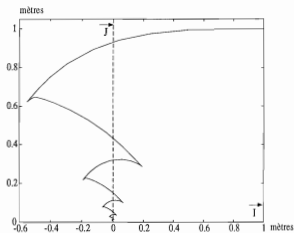


Figure 4.11: Trajectoire de S_1

Conditions initiales :

$$x=0\text{m}, y=0\text{m}, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$$

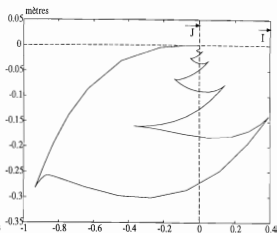


Figure 4.12: Trajectoire de S_1

4.2.3 Analyse de la vitesse de convergence des lois instationnaires

Les premières lois de bouclage d'état instationnaires, proposées à partir de 1990 [Sam90], présentaient un taux de convergence très lent. Aussi, nous avons cherché à caractériser, sur l'exemple d'une loi de bouclage d'état instationnaire proposée dans la littérature, ce taux de convergence, afin, dans un second temps, de pouvoir proposer des solutions pour l'améliorer. Les outils d'analyse sur lesquels nous nous sommes basés sont les variétés centres instationnaires introduites dans F ou [MSPJ94]. Nous avons eu alors connaissance d'autres travaux, utilisant la notion de systèmes homogènes, qui aboutissaient directement à la synthèse de lois de bouclage d'état instationnaires présentant un taux de convergence exponentiel pour une certaine norme. Par conséquent cette section est organisée comme suit : les sous-sections 4.3.3.a à 4.3.3.c sont consacrées à notre étude originale sur le taux de convergence des lois de bouclage d'état instationnaires proposées par J-B. Pomet dans [Pom92] et [PTBC92]. Plus précisément, la section 4.3.3.a présente les lois de J-B. Pomet. Notre outil d'analyse, i.e. les variétés centre instationnaires, est décrit à la section 4.3.3.b. Enfin, la caractérisation du taux de convergence des lois de J-B. Pomet obtenue grâce à cet outil est présentée à la section 4.3.3.c. Enfin, à la section 4.3.3.d, nous décrivons très brièvement, la technique finalement utilisée pour rendre exponentielles les lois de bouclage d'état instationnaires.

4.2.3.a Présentation de la loi de bouclage instationnaire proposée par J-B. Pomet

Dans cette section, nous rappelons tout d'abord la méthode générale proposée par J-B. Pomet dans [Pom92] pour stabiliser un système non-linéaire sans dérive sur la configuration origine. Nous présentons ensuite les premières modifications que nous avons apportées avec l'auteur sur cette loi de commande ([PTBC92],[Thu91]) pour d'une part, éliminer certains comportements aberrants de ce bouclage, et d'autre part, améliorer légèrement son taux de convergence.

Loi instationnaire originale, proposée dans [Pom92]

Soit un système non-linéaire sans dérive

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m f_i(q) u_i \quad (4.71)$$

avec

q vecteur d'état de dimension n ,

$f_i(q)$ m champs de vecteurs C^∞ de dimension n ,

u_i m commandes scalaires.

Ces systèmes, sous l'hypothèse que $\forall q \ f_{i_*} \in [1, m](q) \neq 0$, ne peuvent pas être stabilisés asymptotiquement par une loi de retour d'état continûment différentiable (obstruction de Brockett).

J.-B. Pomet propose dans [Pom92] de choisir une fonction $V(t, q)$ périodique en temps, afin de pouvoir utiliser le Théorème de LaSalle de la même manière que pour une fonction $V(q)$ (voir par exemple [Yos66, Th.14.8]). La dérivée de $V(t, q)$, au vu de (4.71) s'écrit

$$\dot{V}(t, q) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^m L_{f_i} V u_i \quad (4.72)$$

avec $L_{f_i} V$ la dérivée de Lie de $V(t, q)$ selon le champ de vecteurs $f_i(q)$ (voir relation (7.5))

$$L_{f_i} V = \frac{\partial V}{\partial q} f_i$$

Le principe central de la technique de stabilisation proposée dans [Pom92] consiste à introduire la fonction $\alpha(t, q)$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha(t, q) L_{f_1} V = 0 \quad (4.73)$$

Supposons que $\alpha(t, q)$ ait été calculée explicitement. Alors, la loi de commande

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha(t, q) - L_{f_1} V \\ u_i &= -L_{f_i} V \end{cases} \quad (2 \leq i \leq m) \quad (4.74)$$

conduit à (en reportant (4.74) et (4.73) dans (4.72))

$$\dot{V}(q) = - \sum_{i=1}^m (L_{f_i} V)^2 \leq 0 \quad (4.75)$$

La loi de commande (4.74) assure donc la stabilité du système (4.71). Elle assurera la stabilité asymptotique si (Théorème de LaSalle) le plus grand sous-espace invariant inclus dans

$$\mathcal{A} = \{q \mid \dot{V}(t, q) = 0 \quad \forall t\} \stackrel{(4.75)}{\iff} \{q \mid L_{f_i}(q) V(t, q) = 0 \quad \forall t \text{ et } \forall i \in [1, m]\} \quad (4.76)$$

est réduit à $\{0\}$. Il est prouvé dans [Pom92] que sous une hypothèse légèrement plus restrictive que la commandabilité⁽⁻¹⁾, il existe toujours un couple $(V(t, q), \alpha(t, q))$ tel que \mathcal{A} soit effectivement réduit à $\{0\}$. Un algorithme construisant un tel couple est également proposé. Malheureusement, il conduit souvent à des calculs très pénibles, voire

⁽⁻¹⁾ Un système non-linéaire sans dérive (4.71) est commandable si

$$\forall q \quad \text{Rang}(f_1(q), \dots, f_m(q), \text{ad}_{f_1(q)}^k f_j(q) \mid (i, j) \in [1, m]^2, k \in \mathbb{R}^{++}) = n$$

L'hypothèse permettant de construire la loi proposée par J.-B. Pomet est légèrement plus restrictive que la commandabilité, il faut pouvoir engendrer un espace de dimension n en ne crochétant que par rapport à un seul champ de vecteurs, par exemple $f_1(q)$

$$\forall q \neq 0 \quad \text{Rang}(f_1(q), \dots, f_m(q), \text{ad}_{f_1(q)}^k f_j(q) \mid j \in [2, m], k \in \mathbb{R}^{++}) = n \quad (4.77)$$

Si $f_1(q)$ ne satisfaisait pas d'emblée la relation (4.77), un premier retour d'état statique peut être utilisé pour remplacer ce champ de vecteurs par une combinaison linéaire des f_i , $i \in [1, m](q)$

inextricables (l'une des étapes est par exemple l'intégration explicite de l'équation aux dérivées partielles (4.73)). Dans le cas d'un système simple, comme le modèle cinématique d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 , cet algorithme peut être conduit jusqu'à son terme.

Le modèle cinématique d'un robot appartenant à la classe \mathcal{R}_0^2 s'écrit (Proposition D.5 ou Tableau 2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sin \theta v \\ \dot{y} &= \cos \theta v \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases} \quad (4.78)$$

avec

(x, y) coordonnées dans un repère immobile $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ d'un point fixe du robot, placé sur l'axe de la (ou les) roue(s) fixe(s) (voir Proposition D.5),

θ orientation de l'axe de la (ou les) roue(s) fixe(s) par rapport à la direction immobile \vec{I} ,

v : vitesse linéaire du point de coordonnées (x, y) (v était appelé degré de liberté cinématique η_{m_1} dans la Proposition D.5),

ω : vitesse du rotation du châssis (ω était appelé degré de liberté cinématique η_{m_2} dans la Proposition D.5).

Le système (4.78) est clairement un système sans dérive. L'algorithme de J-B. Pomet propose, pour stabiliser ce système sur la configuration origine $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$, de considérer le couple $(V(t, q), \alpha(t, q))$ suivant

$$- V(t, q) = \frac{1}{2}(\theta + x \cos t)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad (4.79)$$

$$- \alpha(t, q) = x \sin t \quad (4.80)$$

En reportant (4.79) dans (4.74), nous obtenons que la loi de bouclage instationnaire s'écrit :

$$\begin{cases} v &= \sin \theta(x + (\theta + x \cos t) \cos t) - y \cos \theta \\ \omega &= -(\theta + x \cos t) + x \sin t \end{cases} \quad (4.81)$$

Le système (4.78) étant très simple, un calcul direct peut montrer que la loi (4.81) stabilise effectivement ce système : la dérivée de la fonction de Lyapunov donnée par (4.79), en utilisant (4.81) et (4.78) s'écrit

$$\dot{V}(t, q) = -(\sin \theta(x + (\theta + x \cos t) \cos t) - y \cos \theta)^2 - (\theta + x \cos t)^2 \leq 0 \quad (4.82)$$

La loi de commande (4.81) garantit donc la stabilité du système (4.78). Afin d'utiliser le Théorème de LaSalle, considérons \mathcal{B} le plus grand sous-espace invariant inclus dans \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \{q \mid \dot{V}(t, q) = 0\} \quad (4.83)$$

En reportant (4.82) dans (4.83), nous obtenons

$$\mathcal{A} = (q / \bullet \theta + x \cos t = 0 \quad (4.84)$$

$$\bullet \sin \theta (x + (\theta + x \cos t) \cos t) - y \cos \theta = 0) \quad (4.85)$$

On déduit immédiatement de (4.85), que sur B , $v = 0$. Par conséquent, au vu de (4.78)

$$\text{Sur } B, \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \text{Sur } B, \quad x \text{ et } y \text{ sont des constantes} \quad (4.86)$$

En reportant maintenant (4.84) dans (4.85), nous obtenons également que

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0 \quad (4.87)$$

Les relations (4.86) et (4.87) impliquent que

$$\theta \text{ est aussi une constante sur } B \quad (4.88)$$

Enfin, si nous comparons (4.84) avec (4.86) et (4.88), il est clair que pour avoir ces 3 relations satisfaites pour tout t , la seule possibilité est que x , y et θ soient nuls. B est donc réduit à $\{0\}$, le Théorème de LaSalle assure donc que le système (4.78) commandé par (4.81) est asymptotiquement stable.

Loi instationnaire proposée dans [PTBC92]

La loi de bouclage instationnaire (4.81) a été construite d'une manière purement mathématique, sans prendre en compte la signification physique de chaque élément du vecteur d'état q . Aussi, le comportement général du robot que l'on obtient présente quelques aberrations. Deux améliorations significatives de la loi de bouclage instationnaire (4.81) sont présentées dans [PTBC92] ou [Thu91].

Non-recul du robot

Le but de la loi de bouclage instationnaire (4.81) est d'amener à 0, d'une part l'orientation θ du robot, et d'autre part x et y , les 2 coordonnées cartésiennes d'un point fixe dudit robot. Au vu de la seconde partie des objectifs de la loi de bouclage instationnaire, il semblerait naturel, de façon que la trajectoire du robot ne soit pas erratique, que la quantité $x^2 + y^2$ décroisse de manière monotone vers 0.

La loi de bouclage instationnaire (4.81) ne garantit malheureusement pas ce comportement. Elle n'assure en effet que la décroissance monotone de la fonction de Lyapunov $V(t, q)$ donnée par (4.79), et des simulations mettent en évidence que si par exemple la valeur initiale de θ est grande par rapport à celle de x et de y , la quantité $x^2 + y^2$ commence par croître, avant de converger vers 0, ce qui d'un point de vue pratique est un non-sens.

De manière à éviter ce recul initial du robot, considérons la fonction de Lyapunov non propre

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad (4.89)$$

La dérivée de cette fonction, en utilisant (4.78), s'écrit

$$\dot{V} = (-\sin \theta x + \cos \theta y) v$$

Aussi, en choisissant pour v , la loi de retour d'état suivante

$$v = \sin \theta x - \cos \theta y \quad (4.90)$$

nous obtenons immédiatement que

$$\dot{V} = -v^2 \leq 0 \quad (4.91)$$

Au vu de (4.89) et (4.91), la loi de commande (4.90) garantit clairement que la quantité $x^2 + y^2$ est monotone décroissante, c'est-à-dire que le robot ne recule pas.

Reprenons maintenant la fonction de Lyapunov (4.79) proposée par J-B. Pomet. On constate très facilement que la loi de commande

$$\begin{cases} v = \sin \theta x - \cos \theta y \\ \omega = x \sin t - (\theta + x \cos t) + \sin \theta \cos t v \end{cases} \quad (4.92)$$

conduit (en reportant (4.92) et (4.78) dans (4.79)) à

$$V = -(-\sin \theta x + \cos \theta y)^2 - (\theta + x \cos t)^2 \leq 0 \quad (4.93)$$

La loi de commande (4.92), tout comme la loi (4.81) fournie par l'algorithme de J-B. Pomet, assure donc la stabilité du système (4.78). En utilisant maintenant exactement les mêmes arguments que ceux présentés pour la loi (4.81), on montre que la loi (4.92) stabilise asymptotiquement ce système. Par conséquent, la loi de bouclage instationnaire (4.92) est, pour les robots de la classe \mathcal{R}_0^2 , une alternative à la loi (4.81) construite au moyen de l'algorithme général proposé dans [Pom92]. Elle présente toutefois un très grand avantage par rapport à cette dernière : la première ligne (4.92) s'exprime comme (4.90). La loi de bouclage instationnaire (4.92) garantit donc que le robot ne recule pas.

Limitations des ré-orientations du robot

Le Théorème de LaSalle, au vu de (4.93), assure que la quantité $(\theta + x \cos t)$ tend vers zéro. Nous en déduisons que la loi de bouclage instationnaire (4.92) amène les variables x et θ à zéro avec le même taux de convergence.

Afin d'améliorer le taux de convergence de x , nous avons dans un premier temps, [Thu91], proposé de modifier la fonction de Lyapunov (4.79) comme suit

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\lambda} + x \cos t\right)^2 \quad \text{avec } \lambda > 1 \quad (4.94)$$

En modifiant la loi de bouclage instationnaire (4.92) comme ci-dessous

$$\begin{cases} v = \sin \theta x - \cos \theta y \\ \omega = \lambda x \sin t - \left(\frac{\theta}{\lambda} + x \cos t\right) + \lambda \sin \theta \cos t v \end{cases} \quad (4.95)$$

nous obtenons que :

$$\dot{V} = -(-\sin \theta x + \cos \theta y)^2 - \left(\frac{\theta}{\lambda} + x \cos t \right)^2 \leq 0$$

Nous en déduisons que la loi de bouclage instationnaire (4.95) amène la variable x à zéro avec cette fois le même taux de convergence que pour la variable $\frac{\theta}{\lambda}$. Les simulations montrent que le taux de convergence de x est très significativement amélioré. Les justifications théoriques seront données à la section 4.3.3.c. Cette modification détériore cependant la convergence de θ : son taux de convergence reste identique à celui observé avec la loi (4.92), mais l'amplitude des oscillations de θ croît avec λ , plus précisément le robot effectue plusieurs révolutions sur lui-même avant de se stabiliser sur $\theta = 0$.

Afin d'éviter ce comportement, nous introduisons le difféomorphisme suivant

$$\begin{aligned}]-\pi, \pi[&\mapsto]-\infty, \infty[\\ \theta &\mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

à l'intérieur de la fonction de Lyapunov (4.94), c'est-à-dire nous considérons

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda} + x \cos t \right)^2 \quad (4.96)$$

Contrairement à la variable θ , la variable $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes sans que la trajectoire du robot soit erratique : en effet, quelle que soit la valeur de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, θ reste dans $]-\pi, \pi[$, le robot ne peut donc pas faire plus d'une rotation sur lui-même. La modification à apporter à la loi de bouclage instationnaire (4.95) est

$$\begin{cases} v = \sin \theta x - \cos \theta y \\ \omega = \frac{2\lambda}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(x \sin t - \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda} + x \cos t \right) + \sin \theta \cos t v \right) \end{cases} \quad (4.97)$$

Elle conduit (en reportant (4.97) et (4.78) dans (4.96)) à :

$$\dot{\tilde{V}} = -(-\sin \theta x + \cos \theta y)^2 - \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda} + x \cos t \right)^2 \leq 0$$

La loi de commande (4.97) assure donc la stabilité du système (4.78). Les mêmes arguments que ceux présentés pour la loi (4.81) prouvent qu'elle stabilise également asymptotiquement ce système, avec cette fois les 2 avantages : le robot ne recule jamais et ne peut pas effectuer plus d'une rotation sur lui-même.

4.2.3.b Variétés centres instationnaires

Dans [PTBC92] ou [Thu91], l'introduction du paramètre λ pour régler le taux de convergence de la variable x (lois (4.95) et (4.97)) est motivée uniquement par un raisonnement

intuitif. La justification théorique est donnée ci-dessous, à la section 4.3.3.c. Elle repose sur la notion de variété centre instationnaire, que nous présentons dans cette section.

Nous rappelons tout d'abord les principales définitions et théorèmes caractérisant les variétés centres dans le cas des systèmes ne dépendant pas explicitement du temps. Pour présenter ces notions, classiques en Automatique non-linéaire, nous nous appuyons sur [Car81, Ch. 1 & 2] et [Isi89, Ann. B]. Nous montrons ensuite, en utilisant les résultats proposés dans [Tee92] ou [MSPJ94], que la notion de variété centre peut être étendue très facilement au cas de systèmes dépendant explicitement du temps, à la condition que cette dépendance intervienne via des fonctions trigonométriques. Cette extension des résultats classiques est suffisante pour nous étudier le comportement du système (4.78) en boucle fermée avec la loi de bouclage instationnaire (4.97).

Variétés centre dans le cas de systèmes ne dépendant pas explicitement du temps

Soit le système non-linéaire ne dépendant pas explicitement du temps

$$\dot{z} = f(z) \quad (4.98)$$

avec :

$$z \in \mathbb{R}^n,$$

f est un champ de vecteurs C^r , avec $r \geq 1$,

$z = 0$ est un point d'équilibre pour le système (4.98), c'est-à-dire $f(0) = 0$.

Afin de caractériser le comportement du système (4.98) dans un voisinage de son équilibre $z = 0$, une approche très classique consiste à calculer la matrice jacobienne de f en $z = 0$

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0}$$

Dans 2 cas de figure, on peut instantanément conclure sur la nature de l'équilibre $z = 0$

si toutes les valeurs propres de J sont à partie réelle strictement négative, alors $z = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable pour le système (4.98),

si au moins une valeur propre de J est à partie réelle strictement positive, alors $z = 0$ est un équilibre instable pour le système (4.98).

A l'inverse, si J ne possède aucune valeur propre à partie réelle strictement positive, mais au moins une valeur propre à partie réelle nulle, alors cette approche basée sur l'approximation linéaire du système (4.98) ne fournit aucun renseignement sur le comportement de ce système dans un voisinage de $z = 0$. Il faut, dans ce dernier cas de figure, utiliser la notion de variété centre, que nous introduisons maintenant (Définition 4.3 ci-dessous).

Soit un système (4.98) dont la jacobienne J ne possède aucune valeur propre à partie réelle strictement positive, mais une ou plusieurs valeurs propres à partie réelle nulle. Soient plus précisément

n^- le nombre de valeurs propres à partie réelle strictement négative,

n^0 le nombre de valeurs propres à partie réelle nulle,

(avec bien sûr $n = n^- + n^0$).

Après éventuellement un changement de coordonnées, le système (4.98) peut être ré-écrit (développement de Taylor à l'ordre 1) comme

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A z_1 + f_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = B z_2 + f_2(z_1, z_2) \end{cases} \quad (4.99)$$

avec:

A une matrice constante de dimension $(n^- \times n^-)$ dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative,

B une matrice constante de dimension $(n^0 \times n^0)$ dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle nulle,

f_1, f_2 fonctions C^r s'annulant en $(z_1, z_2) = (0, 0)$ de même que leur matrice jacobienne $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial z}$.

Dans la suite, nous utiliserons exclusivement la représentation (4.99) du système (4.98). Nous pouvons maintenant écrire successivement la définition d'une variété invariante et celle d'une variété centre

Définition 4.2 Variété localement invariante

Une variété $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est dite localement invariante pour le système (4.99) si pour toute condition initiale $(z_{1,0}, z_{2,0})^T \in \mathcal{M}$, la solution $(z_1(t), z_2(t))^T$ du système (4.99) appartient à \mathcal{M} pour $|t| < T$, avec $T > 0$. \square

Définition 4.3 Variété centre

Une variété $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est dite variété centre pour le système (4.99) au point $(z_1 = 0, z_2 = 0)^T$ si

\mathcal{M} est une variété localement invariante pour le système (4.99) dans un voisinage de $(z_1 = 0, z_2 = 0)^T$

l'espace tangent en $(z_1 = 0, z_2 = 0)^T$ à \mathcal{M} , noté $T_{(0,0)}\mathcal{M}$, est confondu avec l'espace tangent en $(z_1 = 0, z_2 = 0)^T$ à la variété $z_1 = 0$. \square

Nous donnons maintenant l'énoncé des 3 théorèmes principaux relatifs aux variétés centre. Leur preuve peut être trouvée dans [Car81, Ch. 2].

Théorème 4.4 Existence d'une variété centre

Pour tout système (4.99), il existe toujours un voisinage $V \subset \mathbb{R}^{n^*}$ de $z_2 = 0$ et une fonction C^r $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n^-}$ tels que

$$\Pi = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{n^-} \times V \text{ vérifiant } z_1 = \pi(z_2)\}$$

est une variété centre pour le système (4.99). \square

L'utilité d'une variété centre pour l'étude de la stabilité du système (4.99) autour de l'équilibre $z = 0$ est illustrée par le Théorème 4.5 : une variété centre permet de ramener l'analyse de la stabilité du système (4.99), de dimension n , à celle d'un système de dimension n^o comme décrit ci-dessous.

Théorème 4.5 Principe de réduction

Soit le système de dimension n^o

$$\dot{p} = Bp + f_2(\pi(p), p) \quad (4.100)$$

Si $p = 0$ est un équilibre stable (respectivement asymptotiquement stable, instable) pour le système (4.100), alors $(z_1, z_2)^T = (0, 0)^T$ est un équilibre stable (respectivement asymptotiquement stable, instable) pour le système (4.99). \square

La preuve du Théorème 4.5 (cf. [Car81, Sect. 2.4]) met en évidence que sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}^{n^-} \times \mathbb{R}^{n^o}$ de $z_1 = z_2 = 0$, z_1 converge vers $\pi(z_2)$ de façon exponentielle. Une variété centre $\pi(z_2)$ fournit par conséquent toujours une très bonne approximation du comportement de z_1 dans un voisinage de l'origine.

Pour exploiter le Théorème 4.5, il est nécessaire de connaître une expression explicite pour la fonction $\pi(z_2)$. Au vu de la Définition 4.3 d'une variété centre, $\pi(z_2)$ vérifie les 2 conditions

puisque'une variété centre contient $z = (0, 0)^T$, et est tangente à l'hyper-plan $z_1 = 0$ en $z = (0, 0)^T$, nous avons

$$\pi(0) = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial z_2}(0) = 0 \quad (4.101)$$

puisque'une variété centre est localement invariante, toute courbe solution du système (4.99) appartenant initialement à la variété centre (i.e. $z_1(0) = \pi(z_2(0))$), reste sur cette variété centre. Nous en déduisons donc que

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dt}$$

ou encore, en utilisant (4.99), que

$$A \pi(z_2) + f_1(\pi(z_2), z_2) = \frac{\partial \pi}{\partial z_2} (B z_2 + f_2(\pi(z_2), z_2)) \quad (4.102)$$

Le calcul de $\pi(z_2)$ consiste donc en la résolution explicite d'un système d'équations aux dérivées partielles, précisément le système (4.102) associé aux conditions initiales (4.101). Très généralement une telle résolution est impossible. Le Théorème 4.6 ci-dessous montre que l'on peut connaître une approximation de $\pi(z_2)$ à n'importe quel ordre, ce qui est suffisant pour réaliser l'analyse de la stabilité du système (4.100)

Théorème 4.6 Approximation d'une variété centre

Soient $V \subset \mathbb{R}^{n^*}$ un voisinage de $z_2 = 0$, et $z_1 = \pi_k(z_2)$ une fonction C^1 définie depuis V vers \mathbb{R}^{n^*} présentant les propriétés suivantes

$\pi_k(z_2)$ vérifie les conditions initiales (4.101), i.e. $\pi_k(0) = 0$ et $\frac{\partial \pi_k}{\partial z_2}(0) = 0$,

$\pi_k(z_2)$ approxime les solutions du système d'équations aux dérivées partielles (4.102) de la manière suivante

$$A \pi_k(z_2) + f_1(\pi_k(z_2), z_2) - \frac{\partial \pi_k}{\partial z_2}(B z_2 + f_2(\pi_k(z_2), z_2)) = o(|z_2|^k)$$

Alors $\pi_k(z_2)$ est une approximation à l'ordre k de la variété centre $\pi(z_2)$

$$|\pi(z_2) - \pi_k(z_2)| = o(|z_2|^k)$$

□

Dans la plupart des cas, on approxime $\pi(z_2)$ par une fonction $\pi_k(z_2)$ polynomiale d'ordre k .

Variétés centre dans le cas de systèmes dépendant explicitement du temps

Soit maintenant un système non-linéaire dépendant explicitement du temps, via des fonctions trigonométriques

$$\dot{z} = f(t, z) \quad (4.103)$$

avec

$$z \in \mathbb{R}^n,$$

f est un champ de vecteurs C^r ($r \geq 2$), dont la dépendance en temps est trigonométrique, c'est-à-dire la variable t apparaît dans l'expression de f uniquement via des fonctions $\sin k_i t$ ou $\cos k_i t$ ($k_i, k_j \in \mathbb{R}$),

$z = 0$ est un point d'équilibre pour le système (4.103), c'est-à-dire $\forall t$ $f(t, 0) = 0$.

Un tel système instationnaire peut être présenté, par un simple jeu d'écriture, sous la forme d'un système stationnaire. En effet, soient

p le nombre de lignes trigonométriques (i.e. le nombre de réels k_i) apparaissant dans l'expression de f ,

w : le vecteur de dimension $2p$ défini par

$$w = (w_{s,1}, w_{c,1}, \dots, w_{s,p}, w_{c,p})^T$$

avec

$$\begin{cases} w_{s,1} &= \sin k_1 t \\ w_{c,1} &= \cos k_1 t \\ w_{s,p} &= \sin k_p t \\ w_{c,p} &= \cos k_p t \end{cases} \quad (4.104)$$

S : la matrice $(2p \times 2p)$ définie par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & & \\ -k_1 & 0 & & \\ & & 0 & k_p \\ & & -k_p & 0 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

En reportant (4.104) et (4.105) dans l'expression du système instationnaire (4.103), nous pouvons ré-écrire celui-ci comme :

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, w) \\ \dot{w} = S w \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{conditions initiales} \\ z_0 \\ w_0 = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)^T \end{array} \quad (4.106)$$

Le système (4.106) ainsi obtenu est bien stationnaire (puisque'il ne dépend pas explicitement du temps), mais ne possède pas de point d'équilibre : en effet, par construction, la partie inférieure du système (4.106) est constamment oscillante, il n'existe aucune configuration (z, w) pour laquelle $\dot{w} = 0$. Nous en concluons que les Théorèmes classiques 4.4 à 4.6 ne peuvent pas être utilisés pour caractériser les variétés centre des systèmes (4.103).

Des théorèmes plus généraux ont été établis dans [Tee92]. Ils assurent, dans un voisinage de $(z = 0, w = \forall)$, l'existence de variétés centre pour les systèmes (4.103), à la condition que la matrice dérivée partielle de $f(z, w)$ en $z = 0$ ne dépende pas de w , i.e.

$$J = \left(\frac{\partial f(z, w)}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \text{est une matrice constante} \quad (4.107)$$

Nous en donnons maintenant l'énoncé.

Comme dans le cas stationnaire, soient

n^- : le nombre de valeurs propres de J à partie réelle strictement négative,

n^0 : le nombre de valeurs propres de J à partie réelle nulle,

(avec bien sûr $n = n^- + n^0$).

Après éventuellement un changement de coordonnées, le système (4.106), au vu de (4.107), peut être ré-écrit (développement de Taylor à l'ordre 1) comme

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Az_1 + f_1(z, w) \\ \dot{z}_2 = Bz_2 + f_2(z, w) \\ \dot{w} = Sw \end{cases} \quad (4.108)$$

avec:

A une matrice constante de dimension $(n^- \times n^-)$ dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative,

B une matrice constante de dimension $(n^+ \times n^+)$ dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle nulle,

S la matrice de dimension $(2p \times 2p)$ définie par (4.105), dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle nulle,

f_1, f_2 : fonctions C^r s'annulant en $(z_1, z_2, w) = (0, 0, \forall)$ de même que leur matrice dérivée partielle par rapport à z $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial z}$.

Le Théorème 4.7 ci-dessous assure l'existence de variétés centre pour les systèmes pouvant être présentés sous la forme (4.108) :

Théorème 4.7 Existence d'une variété centre pour certains systèmes instationnaires

Pour tout système (4.108), il existe toujours un voisinage $V \in \mathbb{R}^{n^+}$ de $z_2 = 0$ et une fonction C^r $\pi : V \times [-1, 1]^{2p} \rightarrow \mathbb{R}^{n^-}$ tels que

$$\Pi = \{(z_1, z_2, w) \in (\mathbb{R}^{n^-} \times V \times [-1, 1]^{2p}) \text{ vérifiant } z_1 = \pi(z_2, w)\}$$

est une variété centre pour le système (4.108). \square

Le Théorème 4.7 est un cas particulier du Lemme 6.1 présenté dans [Tee92]. Ce résultat plus général assure l'existence d'une variété centre pour un système présentant la structure (4.108), mais pour lequel la matrice S peut être n'importe quelle matrice constante dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle nulle, et non obligatoirement la matrice définie par (4.105). Le Théorème 4.7 nous suffit cependant pour, dans ce mémoire, étudier et améliorer le taux de convergence des lois instationnaires proposées par J-B. Pomet.

Une fois que l'existence d'une variété centre $\pi(z_2, w)$ a été établie pour les systèmes (4.108) dans le voisinage d'une configuration $(z_2 = 0, w = \forall)$, le Théorème 4.5, les relations (4.101) (4.102) et le Théorème 4.6 se généralisent sans difficulté au cas de ces systèmes

Théorème 4.8 Systèmes (4.108) Principe de réduction

Soit le système de dimension $n^+ + 2p$

$$\begin{cases} \dot{p} = Bp + f_2(\pi(p, q), p, q) \\ \dot{q} = Sq \end{cases} \quad (4.109)$$

Si $p = 0$ est un équilibre stable (respectivement asymptotiquement stable, instable) pour le système (4.109), alors $(z_1, z_2)^T = (0, 0)^T$ est un équilibre stable (respectivement asymptotiquement stable, instable) pour le système (4.108). \square

La variété centre $\pi(z_2, w)$ vérifie, par construction, les 2 conditions (généralisation des relations (4.101) et (4.102))

$$\pi(0, w) = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial z_2}(0, w) = \frac{\partial \pi}{\partial w}(0, w) = 0 \quad (4.110)$$

$$A\pi(z_2, w) + f_1(\pi(z_2, w), z_2, w) = \frac{\partial \pi}{\partial z_2}(Bz_2 + f_2(\pi(z_2, w), z_2, w)) + \frac{\partial \pi}{\partial w}Sw \quad (4.111)$$

Théorème 4.9 Systèmes (4.108) Approximation d'une variété centre

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de $z_2 = 0$, et $z_1 = \pi_k(z_2, w)$ une fonction C^1 définie depuis $V \times [-1, 1]^{2p}$ vers \mathbb{R}^n présentant les propriétés suivantes

- $\pi_k(z_2, w)$ vérifie les conditions initiales (4.110), i.e. $\pi_k(0, w) = 0$ et $\frac{\partial \pi_k}{\partial z_2}(0, w) = \frac{\partial \pi_k}{\partial w}(0, w) = 0$,
- $\pi_k(z_2, w)$ approxime les solutions du système d'équations aux dérivées partielles (4.102) de la manière suivante

$$A\pi_k(z_2, w) + f_1(\pi_k(z_2, w), z_2, w) - \frac{\partial \pi_k}{\partial z_2}(Bz_2 + f_2(\pi_k(z_2, w), z_2, w)) - \dots - \frac{\partial \pi_k}{\partial w}Sw = o(|z_2|^k)$$

Alors $\pi_k(z_2, w)$ est une approximation à l'ordre k de la variété centre $\pi(z_2, w)$

$$|\pi(z_2, w) - \pi_k(z_2, w)| = o(|z_2|^k) \quad (4.112)$$

□

La relation (4.112) met en évidence que l'ordre de l'approximation $\pi_k(z_2, w)$ est définie uniquement par rapport à la variable z_2 par exemple les termes z_2^2 , $z_2^2 w_{s,1}$ et $z_2^2 w_{s,1}^2$ sont tous, vis à vis du Théorème 4.9, des termes d'ordre 2.

4.2.3.c Analyse de la vitesse de convergence de la loi proposée dans [PTBC92]

Dans cette section, nous considérons de nouveau le système (4.78), c'est-à-dire le modèle cinématique des robots mobiles de la classe \mathcal{R}_0^2 . Nous montrons tout d'abord qu'après un changement de coordonnées, ce système commandé par la loi de bouclage instationnaire (4.97), proposée dans [PTBC92], peut être présenté sous la forme (4.108). Nous en déduisons, Théorème 4.7, l'existence d'une variété centre instationnaire pour ce système bouclé. Une approximation polynomiale de cette variété centre est alors calculée (Théorème 4.9), de façon à pouvoir utiliser le Principe de réduction (Théorème 4.8). Ce dernier fournit très simplement le taux de convergence de chacune des variables d'état du système (4.78). Des simulations illustrant les résultats obtenus terminent cette section.

Système de coordonnées permettant l'étude par variété centre

En reportant la loi de bouclage instationnaire (4.97) dans les équations du modèle dynamique (4.78) d'un robot mobile de la classe \mathcal{R}_0^2 , nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin^2 \theta x + \sin \theta \cos \theta y \\ \dot{y} = \sin \theta \cos \theta x - \cos^2 \theta y \\ \dot{\theta} = \frac{2\lambda}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} (x \sin t - (\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\lambda} + x \cos t) + \sin \theta \cos t (\sin \theta x - \cos \theta y)) \end{cases} \quad (4.113)$$

Afin de le présenter sous la forme (4.108), il faut tout d'abord le rendre stationnaire. Pour cela, nous introduisons les 2 variables exogènes

$$\begin{cases} w_s = \sin t \\ w_c = \cos t \end{cases} \quad (4.114)$$

que nous grouperons par la suite dans le vecteur w

$$w = (w_s, w_c)^T$$

En reportant (4.114) dans (4.113), nous obtenons le nouveau système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin^2 \theta x + \sin \theta \cos \theta y \\ \dot{y} = \sin \theta \cos \theta x - \cos^2 \theta y \\ \dot{\theta} = \frac{2\lambda}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} (x w_s - (\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\lambda} + x w_c) + \sin \theta w_c (\sin \theta x - \cos \theta y)) \\ \dot{w}_s = w_c \\ \dot{w}_c = -w_s \end{cases} \quad (4.115)$$

Le système (4.115) est bien stationnaire. La seconde étape pour présenter ce système sous la forme (4.108) consiste à identifier les variables rapides (i.e. celles associées à une valeur propre à partie réelle strictement négative) et les variables lentes (i.e. celles associées à une valeur propre à partie réelle nulle). Comme la notion de variété centre n'est de toute façon que locale (cf. Définition 4.3), il est tout à fait possible de remplacer les différentes fonctions trigonométriques de la variable θ apparaissant dans (4.115), par leur développement de Taylor autour de $\theta = 0$. De cette manière, ce système se ré-écrit comme un système uniquement polynomial, beaucoup plus facile à analyser. Les développements de Taylor que nous reportons dans (4.115) sont

$$\begin{aligned} * \quad \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^4) \\ * \quad \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^3) \\ * \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^3}{24} + o(\theta^4) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Ils conduisent au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \theta y - \theta^2 x + \\ \dot{y} = -y + \theta x + \theta^2 y + \\ \dot{\theta} = \frac{2\lambda}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} (x w_s - (\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\lambda} + x w_c) + \sin \theta w_c (\sin \theta x - \cos \theta y)) \\ \dot{w}_s = w_c \\ \dot{w}_c = -w_s \end{cases} \quad (4.117)$$

Il est alors immédiat que x est une variable lente (la partie linéaire de \dot{x} est réduite à 0), et y est une variable rapide (la partie linéaire de \dot{y} est $-y$). Nous ne pouvons par contre pas conclure a priori sur θ : il faudrait développer l'expression de $\dot{\theta}$, mais celle-ci apparaît très complexe.

Ces calculs fastidieux peuvent être évités à l'aide du changement de variables suivant

$$\begin{cases} x \\ y \\ \theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ \Theta = \frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\lambda} + x \cos t \end{cases} \quad (4.118)$$

Ce changement de variables consiste à choisir comme variables d'état, non pas les 3 variables naturelles x , y et θ , mais les 3 variables apparaissant dans la fonction de Lyapunov (4.79) associée au système (4.78) lorsqu'il est commandé par la loi de bouclage instationnaire (4.97). On vérifie facilement que le changement de variables (4.118) est effectivement difféomorphique : au vu de (4.96), la variable Θ , et par conséquent $\tan(\frac{\theta}{2})$ restent bornés tout au long du déplacement du robot. Aussi, si $\theta_{t=0} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors nécessairement $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tout au long du déplacement du robot. Nous en déduisons qu'à chaque valeur de Θ est associée par (4.118) une unique valeur de θ .

L'équation différentielle associée à la nouvelle variable Θ est remarquable : en effet, en utilisant (4.78) et (4.118), on obtient immédiatement que

$$\dot{\Theta} = \frac{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}{2\lambda} \omega - x \sin t - \sin \theta v \cos t \quad (4.119)$$

puis en reportant (4.97) dans (4.119), nous obtenons finalement que

$$\dot{\Theta} = -\Theta \quad (4.120)$$

Θ est par conséquent une seconde variable rapide.

Ré-écrivons donc le système (4.117) uniquement en fonction des coordonnées x , y , Θ , w_s , w_c . Au vu de (4.118) et de (4.114), nous avons

$$\theta = 2 \arctan(\lambda(\Theta - x w_c)) \quad (4.121)$$

En utilisant le développement de Taylor de la fonction \arctan , la relation (4.121) s'écrit encore

$$\theta = 2\lambda(\Theta - x w_c) - \frac{2}{3}\lambda^3(\Theta - x w_c)^3 + o((\Theta - x w_c)^4) \quad (4.122)$$

Finalement, en reportant (4.122) dans (4.117), nous obtenons que les équations d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 , lorsque celui-ci est commandé par la loi de bouclage instationnaire (4.97), peuvent être écrites comme

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\lambda(\Theta - x w_c)y - 4\lambda^2(\Theta - x w_c)^2x + \\ \dot{y} = -y + 2\lambda(\Theta - x w_c)x + 4\lambda^2(\Theta - x w_c)^2y + \\ \dot{\Theta} = -\Theta \\ \dot{w}_s = w_c \\ \dot{w}_c = -w_s \end{cases} \quad (4.123)$$

Le système (4.123) est de façon évidente sous la forme standard (4.108)

y et Θ correspondent à z_1 , les valeurs propres de la matrice A sont toutes 2 égales à -1 ,

x correspond à z_2 , la valeur propre de la matrice B est effectivement 0,

les termes non-linéaires apparaissant dans (4.123) s'annulent effectivement en $(0, 0, w_s, w_c)$ de même que leur matrice dérivée partielle par rapport à $(x, y, \Theta)^T$

Le Théorème 4.7 assure par conséquent, dans un voisinage de $(0, 0, 0, w_s, w_c)$, l'existence d'une variété centre

$$\begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \pi(x, w_s, w_c)$$

L'expression de la variété centre associée à la variable Θ est connue de manière exacte c'est $\Theta = 0$. En effet, en intégrant la troisième équation du système (4.123), nous obtenons que

$$\Theta = \Theta_0 e^{-t} \quad (4.124)$$

Ce n'est pas le cas pour la variété centre associée à y , notée $\pi_y(x, w_s, w_c)$. Une approximation polynomiale de cette fonction est calculée ci-dessous à l'aide du Théorème 4.9.

Calcul d'une approximation polynomiale de la variété centre associée à y

Par construction, relation (4.111), la fonction $\pi_y(x, w_s, w_c)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$-\pi_y + 2\lambda x(\Theta - x w_c) + 4\lambda^2(\Theta - x w_c)^2 \pi_y + \frac{\partial \pi_y}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial \pi_y}{\partial x} \dot{x} = 0 \quad (4.125)$$

Le terme de plus bas degré apparaissant dans (4.125) est $-2\lambda x^2 w_c$, qui est de degré 2. Au vu du Théorème 4.9, π_y^{app} approximation polynomiale de π_y à l'ordre 2 vérifie donc l'équation aux dérivées partielles

$$-\pi_y^{app} - 2\lambda x^2 w_c = \frac{\partial \pi_y^{app}}{\partial w} \dot{w} \quad (4.126)$$

Puisque la fonction π_y^{app} n'est pas dérivée par rapport à x dans (4.126), cette fonction présente nécessairement la structure suivante

$$\pi_y^{app} = x^2(\alpha_s w_s + \alpha_c w_c) \quad (\alpha_s, \alpha_c) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.127)$$

En reportant (4.127) dans (4.126), nous obtenons la relation

$$-x^2(\alpha_s w_s + \alpha_c w_c) - 2\lambda x^2 w_c = x^2(\alpha_s w_c - \alpha_c w_s) \quad (4.128)$$

Nous en déduisons facilement que les seules valeurs possibles pour α_s et α_c sont

$$\alpha_s = \alpha_c = -\lambda$$

La fonction $\pi_y^{app}(x, w_s, w_c)$ s'écrit donc

$$\pi_y^{app}(x, w_s, w_c) = -\lambda x^2(w_s + w_c)$$

ou encore, en utilisant les variables naturelles

$$\pi_y^{app} = -\lambda x^2(\sin t + \cos t) \quad (4.129)$$

Taux de convergence des variables d'état

Puisque les variables rapides y et θ convergent exponentiellement vite vers la variété centre $\pi(x, w_s, w_c)$, le taux de convergence de la variable lente x peut être calculé pour y et θ appartenant à cette variété centre (Théorème 4.8). Au vu de la première ligne de (4.123) et de (4.124), il faut donc estimer le taux de convergence de x dans l'équation différentielle

$$\dot{x} = 2\lambda\pi_y(\Theta_0 e^{-t} - x w_c) - 4\lambda^2(\Theta_0 e^{-t} - x w_c)^2 x + \quad (4.130)$$

En utilisant (4.129) et (4.114), l'équation différentielle (4.130) peut encore être écrite comme

$$\dot{x} = -4\lambda^2 x^3 \left(-\left(\frac{\sin t + \cos t}{2} \right) \cos t + \cos^2 t \right) + o(x^3) \quad (4.131)$$

La décroissance de x dans (4.131) est gouvernée par une équation du type

$$\dot{x} = -x^3$$

Le taux de convergence de x est donc $t^{-\frac{1}{3}}$. Il est possible d'être plus précis si on ignore les termes en $o(x^3)$, l'équation différentielle (4.131) peut être intégrée explicitement

$$x^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 t + \lambda^2(\sin 2t + \cos 2t) - \lambda^2 + 1}} \quad (\text{lorsque } x_{t=0} = 1) \quad (4.132)$$

x converge asymptotiquement vers $x^*(t)$. Nous en déduisons que son taux de convergence est $2^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}t^{-\frac{1}{2}}$. En augmentant la valeur du paramètre λ , nous pouvons donc augmenter donc le taux de convergence de x , comme cela avait été noté dans [PTBC92].

Le taux de convergence des autres variables se déduit aisément de celui de x . D'une part, au vu de (4.129), le taux de convergence de y est $\lambda^{-1}t^{-1}$. D'autre part, en utilisant (4.122), (4.124) et le taux de convergence de x , nous obtenons que θ converge comme $\sqrt{2}t^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème 4.10 Taux de convergence induit par la loi de bouclage instationnaire proposée dans [PTBC92]

La loi de bouclage instationnaire (4.97), lorsqu'elle est utilisée pour commander le modèle cinématique des robots mobiles de la classe \mathcal{R}_0^2 (systèmes (4.78)), conduit aux taux de convergence suivants

$$x \text{ converge vers } 0 \text{ comme } 2^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$y \text{ converge vers } 0 \text{ comme } \lambda^{-1}t^{-1}$$

$$\theta \text{ converge vers } 0 \text{ comme } \sqrt{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

Le paramètre λ peut être choisi arbitrairement pour obtenir les performances requises par l'application pratique considérée. \square

Preuve : La preuve du Théorème 4.10 est immédiate au vu de la discussion précédent l'énoncé de ce théorème. \triangleleft

Simulations

Une variété centre est une notion uniquement locale (cf. Définition 4.3). Par conséquent, les taux de convergence calculés au moyen de cet outil (Théorème 4.10) ne décrivent a priori le comportement du système que dans un voisinage de la configuration origine $x = y = \theta = 0$. Les résultats de simulations présentés ci-dessous montrent cependant que les conclusions du Théorème 4.10 sont en fait valides même si le robot est loin de la configuration origine.

Les Figures 4.13 à 4.20 correspondent à la même simulation, caractérisée par les conditions initiales sont

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

le paramètre λ a été choisi égal à 3.

• **Figures 4.13 - 4.14 page 208 :**

Figure 4.13 Evolution de la variable $\Theta = \lambda^{-1} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + x \cos t$ en fonction du temps

Figure 4.14 Evolution de $\ln \Theta$ en fonction du temps

L'évolution de la variable Θ peut être calculée explicitement. Nous avons (relation (4.124))

$$\Theta(t) = \frac{\tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{\lambda} + x(t) \cos t = \Theta_0 e^{-t}$$

L'évolution de Θ est représentée à la Figure 4.13. La décroissance exponentielle de cette variable est mise en évidence à la Figure 4.14 $\ln \Theta$ en fonction du temps est comme attendu une ligne droite de pente -1

• **Figures 4.15 - 4.16 page 209 :**

trait continu Evolution de la variable d'état θ en fonction du temps

trait discontinu Evolution de la fonction $\theta^* = -2\lambda x \cos t$ en fonction du temps

Au vu de (4.122) et de (4.124), la variable d'état θ converge comme la fonction $\theta^* = -2\lambda x \cos t$. Ce résultat est illustré sur la Figure 4.15. Du fait de la convergence exponentielle de Θ vers 0, θ et θ^* ne peuvent plus être distinguées après quelques secondes, même si l'on adapte l'échelle au plus juste, comme cela est fait à la Figure 4.16.

• **Figures 4.17 - 4.18 page 210 :**

trait continu Evolution de la variable d'état y en fonction du temps

trait discontinu Evolution de la fonction $y^* = \pi_y^{app}(t, x)$ (relation (4.129)) en fonction du temps

Tout au moins dans un voisinage de l'origine, la variable y , comme toute variable rapide, converge exponentiellement vite vers une variété centre, appelée ici $\pi_y(t, x)$, et dont une approximation polynomiale d'ordre 2 est $y^* = \pi_y^{app}(t, x)$ (relation (4.129)). Les Figures 4.17 - 4.18 présentent une vérification graphique de ce résultat. Elles montrent que les 2 courbes y et y^* sont superposées après seulement quelques secondes, même si l'on adapte l'échelle au plus juste (Figure 4.18).

• Figures 4.19 - 4.20 page 211 :

trait continu Evolution de la variable d'état x en fonction du temps

trait discontinu Evolution de la fonction $x^*(t)$ (relation (4.132)) en fonction du temps.

La variable x est la variable lente du système en boucle fermée. Sa dynamique est déterminée par l'équation différentielle (4.131). En intégrant les termes de plus bas degré dans (4.131), nous en avons déduit qu'asymptotiquement x se comportait comme la fonction $x^*(t)$ (relation (4.132)). La Figure 4.19 illustre ce résultat, tandis que la Figure 4.20 montre que contrairement à la convergence de y vers la fonction y^* ou celle de θ vers la fonction θ^* , la convergence de x vers la fonction $x^*(t)$ n'est pas exponentielle. Ce résultat était attendu puisque $x^*(t)$ n'est pas une variété centre pour x .

Tous les résultats établis dans cette section ont été vérifiés sur la simulation décrite ci-dessus. Nous constatons de surcroît qu'ils restent valides même lorsque le robot est loin de la configuration désirée $x = y = \theta = 0$, ce qui n'était pas assuré théoriquement.

Les 3 figures restantes, Figures 4.21 à 4.23, illustrent les performances qui peuvent être obtenues lorsque l'on utilise la loi de bouclage instationnaire (4.97). 3 simulations ont été réalisées. Les conditions initiales ont à chaque fois été gardées égales à (4.133). Le paramètre λ , à l'inverse, a été choisi égal successivement à 1, 3 et 5.

• Figures 4.21 - 4.22 page 212 Figure 4.23 page 213 :

trait continu relatif à la simulation pour laquelle λ a été choisi égal à 5

trait discontinu relatif à la simulation pour laquelle λ a été choisi égal à 3

trait alterné relatif à la simulation pour laquelle λ a été choisi égal à 1

La Figure 4.21 présente les 3 trajectoires cartésiennes ainsi obtenues. La Figure 4.22 présente l'évolution de x dans chaque cas. Enfin la Figure 4.23 présente l'évolution de la loi de commande ω .

Le Théorème 4.10 assure que le taux de convergence des 2 variables x et y sont respectivement $2^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}t^{-\frac{1}{2}}$ et $\lambda^{-1}t^{-1}$. Par conséquent, en augmentant la valeur de λ , on augmente d'une manière linéaire, le taux de convergence de ces 2 variables. Cela est illustré par la Figure 4.22 qui présente l'évolution de x en fonction du temps : après quelques secondes, les 3 courbes décroissent de manière proportionnelle. Par exemple, à l'instant $t = 50$ s, nous avons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$
$x_{t=50\text{ s}} \text{ (m)}$	0.102	$0.033 \approx \frac{0.102}{3}$	$0.020 \approx \frac{0.102}{5}$

Il est également intéressant de noter qu'en augmentant la valeur de λ , la trajectoire du robot devient plus naturelle sur la Figure 4.21, toutes les simulations ont été arrêtées à l'instant $t = 50\text{ s}$ nous constatons d'une part, que plus la valeur de λ est grande, plus le robot après 50 s est proche du point visé, c'est-à-dire nous retrouvons le résultat discuté ci-dessus. D'autre part, nous constatons également que plus la valeur de λ est grande, plus la trajectoire du robot est proche de la ligne droite. Cela constitue une seconde raison pour augmenter la valeur de λ .

Augmenter la valeur de λ présente cependant également des inconvénients. Le principal est qu'en procédant ainsi, nous augmentons les pics de commande au vu de (4.97), la loi de commande ω dépend linéairement de λ . Par conséquent, en augmentant la valeur du paramètre λ , nous augmentons dans le même rapport la commande ω . La Figure 4.23 présente l'évolution de ω en fonction du temps. Si nous mesurons par exemple la valeur maximale de cette commande, nous obtenons comme attendu que

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$
$\omega_{\max} \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	-2.229	$-6.612 \approx 3 \times -2.229$	$-11.059 \approx 5 \times -2.229$

Un second inconvénient de la loi de bouclage instationnaire (4.97) est que le taux de convergence de la variable θ ne peut pas être ajusté le Théorème 4.10 montre bien que λ n'a aucune influence sur le taux de convergence de θ (qui reste égal à $\sqrt{2}t^{-\frac{1}{2}}$).

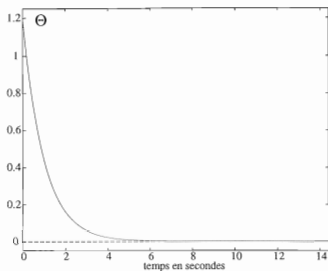


Figure 4.13: Convergence exponentielle de la variable Θ

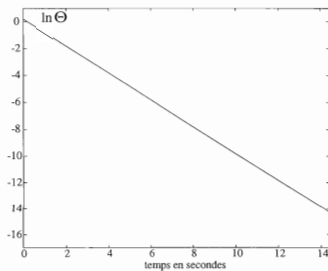
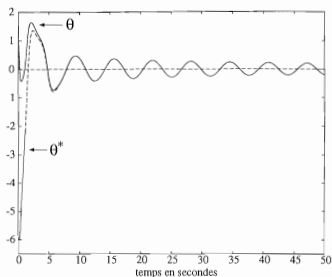
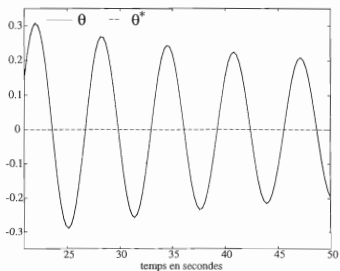


Figure 4.14: Tracé du logarithme de la variable Θ

Figure 4.15: Convergence de θ vers $\theta^* = -2\lambda x \cos t$ Figure 4.16: Convergence de θ vers θ^* (zoom sur des valeurs de $t \rightarrow \infty$)

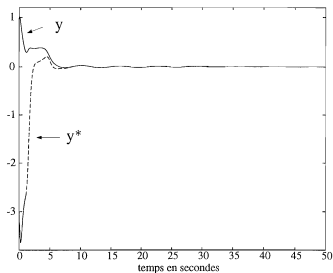


Figure 4.17: Convergence de y vers $y^* = -\lambda x^2(\sin t + \cos t)$

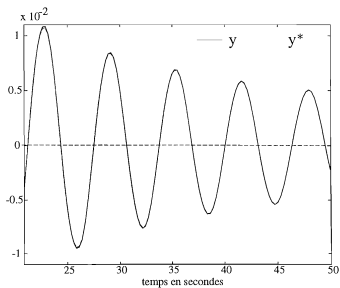


Figure 4.18: Convergence de y vers y^* (zoom sur des valeurs de $t \rightarrow \infty$)

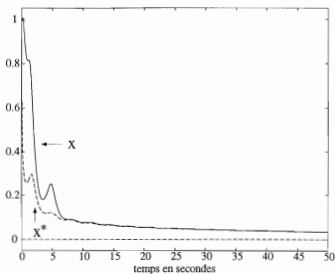


Figure 4.19: Convergence de x vers $x^* = (2\lambda^2 t + \lambda^2(\sin 2t + \cos 2t) - \lambda^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

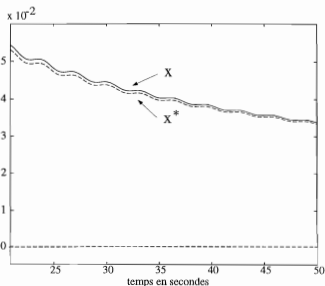


Figure 4.20: Convergence de x vers x^* (zoom sur des valeurs de $t \rightarrow \infty$)

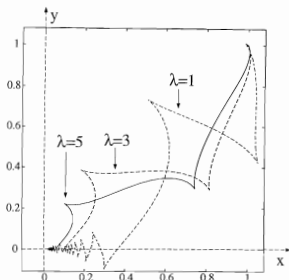


Figure 4.21: Trajectoires cartésiennes obtenues avec différents λ

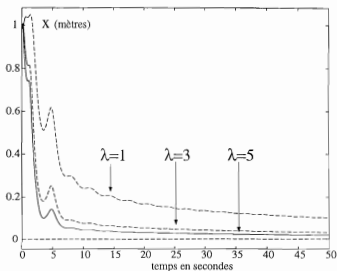
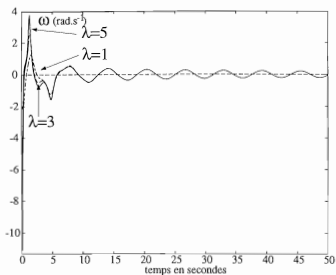


Figure 4.22: Convergence de x obtenue avec différents λ

Figure 4.23: Loi de commande ω obtenue avec différents λ

4.2.3.d Lois de bouclage d'état instationnaires conduisant à un taux de convergence exponentiel - résultats proposés dans la littérature

La loi de bouclage instationnaire (4.97) proposée dans [PTBC92], lorsqu'elle est utilisée pour commander le modèle cinématique d'un robot mobile de la classe \mathcal{R}_0^2 (système (4.78)), conduit à un taux de convergence très faible la variable lente x converge vers 0 comme $2^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}t^{-\frac{1}{2}}$, Théorème 4.10. Certes, la présence devant le terme $t^{-\frac{1}{2}}$ d'un facteur multiplicatif ajustable permet en théorie de rendre aussi rapide que l'on veut la convergence de x , comme illustré par la Figure 4.22. Cependant, en pratique, en raison des limitations sur les actionneurs, l'on dispose de peu de latitude pour choisir λ . Cela est mis en évidence par la Figure 4.23. Ce paramètre doit donc juste être vu comme un degré de liberté permettant de régler les performances de la loi (4.97) au mieux, en fonction des possibilités des actionneurs.

Une amélioration significative de la loi (4.97) serait donc de modifier le taux de convergence $t^{-\frac{1}{2}}$. L'idéal serait bien sûr de le rendre exponentiel. Supposons que l'on veuille préserver absolument la structure de la loi (4.97). Alors il semblerait que la seule possibilité soit de choisir comme fonction de Lyapunov

$$\bar{V} = |x| + \frac{1}{2}y^2 + \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda} + \sqrt{|x|} \cos t \right)^2 \quad (4.134)$$

et pour loi de commande

$$\begin{cases} v = \operatorname{sign}(x) \sin(\theta) - \cos \theta y \\ \omega = \frac{2\lambda}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} \left(\sqrt{|x|} \sin t + \frac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}} \sin \theta \cos tv - \frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\lambda} - \sqrt{|x|} \cos t \right) \end{cases} \quad (4.135)$$

En effet, si l'on suit pas à pas la méthode d'analyse présentée à la section 4.3.3.c, et si l'on fait abstraction du problème posé par la valeur $x = 0$, on montre que la dynamique de la variable lente est donnée par $\dot{x} = -x$, c'est-à-dire, la variable lente converge exponentiellement vite.

Il n'est cependant pas valide d'utiliser le raisonnement présenté à la section 4.3.3.c, en raison précisément du problème posé par la valeur $x = 0$. En effet, l'approche fonctions de Lyapunov et variétés centre qui y est utilisée requiert que toutes les expressions soient respectivement Lipschitz et C^1 , ce qui n'est de façon évidente pas le cas au vu de (4.134) et (4.135). Le recours à des commandes non-Lipschitz en 0, intuité sur la base de l'étude présentée à la section 4.3.3.c, est cependant la seule possibilité pour obtenir une convergence exponentielle, comme le montrent les 2 théorèmes suivants

Théorème 4.11 [M'C95] Impossibilité d'obtenir un taux de convergence exponentiel avec des commandes Lipschitz

Soit un système non-linéaire sans dérive, i.e.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad (4.136)$$

commandable, et soit un bouclage d'état instationnaire $u(t, x)$ Lipschitz par rapport à x stabilisant asymptotiquement le système (4.136) (l'existence d'un tel bouclage est garanti par le Théorème 4.1). Alors le système (4.136) commandé par la loi $u(t, x)$ ne peut pas présenter un taux de convergence exponentiel. \square

Théorème 4.12 [Cor92b] Stabilisation en temps fini

Soit un système non-linéaire sans dérive (4.136) et commandable. Alors, il peut être stabilisé en 0 en temps fini à l'aide d'une loi de bouclage d'état instationnaire C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$. \square

Pour concevoir des lois de bouclage non-Lipschitz, il est nécessaire de se tourner vers d'autres outils que ceux présentés à la section 4.3.3.c. Ces autres outils sont les systèmes homogènes. Nous en donnons ci-dessous un bref aperçu. Une présentation plus précise peut être trouvée dans [M'C95] ou [MM93].

Nous devons tout d'abord introduire quelques définitions

Définition 4.4 Dilatation

Soient r_i , ($1 \leq i \leq n$) une séquence de nombre croissants vérifiant

$$r_1 = 1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$$

et soit λ un réel strictement positif. Alors on appelle dilatation l'application, notée Δ_λ , qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $\Delta_\lambda x$ défini par :

$$\Delta_\lambda x = (\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n) \quad \square$$

Définition 4.5 Fonction homogène de degré l

Une fonction $f(t, x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est dite homogène de degré $l \geq 0$ par rapport à la dilatation Δ_λ si $f(t, \Delta_\lambda x) = \lambda^l f(t, x)$. \square

Définition 4.6 champ de vecteurs homogène de degré m

Soit $X(t, x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, de composantes $(X_1(t, x), \dots, X_n(t, x))^T$. Alors $X(t, x)$ est homogène de degré $m \leq r_n$ par rapport à la dilatation Δ_λ si $X_i(t, x)$ est une fonction homogène de degré $r_i - m$. \square

Définition 4.7 Norme homogène

Une application ρ de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} est appelée norme homogène par rapport à la dilatation Δ_λ si elle vérifie les propriétés suivantes

$$\rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\rho(x) = 0 \iff x = 0,$$

$$\rho(\Delta_\lambda x) = \lambda \rho(x) \quad \forall \lambda > 0. \quad \square$$

La notion de norme homogène permet de créer des fonctions normes C^∞ non plus sur \mathbb{R}^n mais sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Un exemple de telles normes est :

$$\rho(x) = (x_1^{\frac{c}{r_1}} + \dots + x_n^{\frac{c}{r_n}})^{\frac{1}{c}}$$

avec c divisible par tous les r_i .

Définition 4.8 Convergence exponentielle par rapport à une norme homogène

Soit $\dot{x} = X(t, x)$ un système d'équations différentielles et soit $x(t; t_0, x_0)$ sa solution à l'instant t lorsque les conditions initiales sont (t_0, x_0) . On dit que ce système converge exponentiellement vite par rapport à la norme homogène ρ s'il existe 2 scalaires k_1 et k_2 et un voisinage U de x_0 tels que

$$\rho(x(t; t_0, x_0)) \leq k_1 \rho(x_0) e^{-k_2(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{et} \quad \forall x_0 \in U$$

□

Les lois de commande calculées à partir des systèmes homogènes font converger exponentiellement vite le système vers la valeur désirée. Ce "exponentiellement vite" est cependant à prendre au sens de la Définition 4.8. Et, suivant la dilatation associée à la norme ρ , le comportement du système peut être complètement différent. Le choix de la dilatation à utiliser n'étant pas complètement libre, mais guidé par la structure du système, on peut obtenir des comportements très satisfaisants ou au contraire, très surprenants.

La construction de lois de commandes homogènes repose sur l'extension du théorème suivant :

Théorème 4.13 [Ros92] Fonctions de Lyapunov homogènes

Soit $\dot{x} = X(x)$ un système d'équations différentielles, avec $X(x)$ un champ de vecteurs continu et homogène par rapport à une dilatation Δ_λ . Si ce système est asymptotiquement stable autour de $x = 0$, alors il existe une fonction de Lyapunov homogène par rapport à la dilatation Δ_λ et C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$. □

L'approche systèmes homogènes permet donc de définir de façon tout à fait rigoureuse des fonctions de Lyapunov qui ne sont pas Lipschitz au point visé. Le Théorème 4.13 a été généralisé dans [M'C95] au cas des champs de vecteurs dépendant explicitement du temps afin de pouvoir traiter la stabilisation de systèmes mécaniques affrontant l'obstruction de Brockett.

Tous les outils sont maintenant en place pour pouvoir concevoir de façon parfaitement rigoureuse des lois de bouclage d'état instationnaires non-Lipschitz au point visé, permettant ainsi d'obtenir une convergence exponentielle (mais au sens d'une norme homogène, Définition 4.7). Par exemple, les lois de J.-B. Pomet proposées dans [Pom92] sont modifiées dans [M'C95] de manière à présenter un taux de convergence exponentiel. Des lois présentant le même comportement ont également été proposées dans [PS93], [Sam95] et [MS95].

4.3 Commande hybride pour la réalisation d'une tâche complète

Dans cette section, nous nous intéressons au problème suivant

Amener un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 depuis une première position de repos, repérée par ϕ_0 , vers une seconde position de repos, repérée par ϕ_f , via une trajectoire de référence spécifiée à l'avance.

Ce type de déplacement correspond aux tâches ordinairement demandées à un robot mobile dans le cadre d'une application pratique.

Les lois de commande présentées aux sections 4.1 et 4.2 ne permettent pas d'apporter une réponse globale à ce problème

La loi de retour d'état instationnaire proposée par le Théorème 4.4 permet d'amener un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 depuis une première position de repos vers une seconde, mais nous ne pouvons pas spécifier de trajectoire de référence. Les trajectoires observées étant généralement peu naturelles (ce sont des trajectoires très oscillantes, cf. Figures 4.4 ou 4.12), il n'est vraiment pas réaliste de vouloir utiliser cette loi pour joindre 2 positions de repos qui seraient éloignées l'une de l'autre.

La loi de retour d'état dynamique proposée par le Théorème 4.1 permet à l'inverse, de faire suivre à un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 une trajectoire de référence, mais celle-ci doit être mobile (précisément $\eta_{1,ref} \neq 0$, cf. hypothèse (b) du Théorème 4.1). Or, dans le problème que nous nous posons, les conditions initiales et finales correspondent à des positions de repos. La loi de bouclage dynamique est une loi très pertinente : elle linéarise le modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_2^1 et donc assure une convergence exponentielle du robot vers la trajectoire de référence, en offrant de surcroît une grande facilité de réglage pour l'utilisateur. Mais elle ne peut pas être utilisée directement pour résoudre le problème posé.

Aussi, nous proposons dans cette section de combiner ces 2 techniques de commande au sein d'une loi hybride. Celle-ci est construite de telle manière qu'elle conserve les points forts propres aux 2 techniques, mais n'en présente pas les inconvénients.

4.3.1 Principe de la loi hybride

La commande hybride que nous proposons est structuré comme suit

Les variables d'état du robot sont tout d'abord initialisées à l'aide d'une loi de commande boucle ouverte. Cette première phase est très courte. Le but est juste de mettre en marche le robot et de placer ses variables d'état suffisamment proches (au sens du Théorème 4.2) de celles d'un robot qui décrirait la trajectoire de référence, de telle sorte qu'il soit assuré que les singularités décrites au Théorème 4.1 ne seront jamais rencontrées lors de l'utilisation de la loi de bouclage dynamique.

Ensuite, pendant la quasi-totalité du déplacement du robot, la loi de **bouclage dynamique** proposée par le Théorème 4.1 est utilisée. Elle assure que *le robot converge puis suit la trajectoire de référence*. Le taux de convergence du robot vers sa référence est exponentiel et peut être réglé très facilement par l'utilisateur.

Enfin, lorsque le robot est proche de sa position finale, la loi de **bouclage instationnaire** proposée par le Théorème 4.4 est employée afin *d'amener le robot sur cette position de repos*. Ce bouclage, comme tous les bouclages instationnaires, engendre des oscillations pour le robot. Cependant, ces oscillations sont dans notre cas très réduites et n'altèrent pas la convergence d'ensemble du robot en effet, si lors de la commutation vers la loi de bouclage instationnaire, nous avons $\|\hat{\phi}\| = \varepsilon_c$, alors, au vu de (4.56), les oscillations du robot sont confinées dans un disque de rayon ε_c autour du point visé. Nous verrons même que ε_c est en fait une borne très conservative et qu'il est possible en pratique de faire disparaître ces oscillations.

Cette structure de commande hybride comporte 2 commutations. Pour chacune d'elles, nous proposons une procédure qui garantit d'une part, un maximum de continuité pour la commande, et d'autre part, que les diverses singularités des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 sont évitées.

En conclusion, cette commande hybride apparaît très naturelle puisqu'elle exploite les avantages de chacune des 2 lois utilisées (poursuite de trajectoire avec taux de convergence exponentiel pour la loi de bouclage dynamique, et stabilisation sur une position de repos pour la loi de bouclage instationnaire) tout en éliminant leurs inconvénients (impossibilité de s'arrêter pour la loi de bouclage dynamique et oscillations pour la loi de bouclage instationnaire). Ce travail a fait l'objet d'un article, [TAM95b], et d'un rapport, [TAM93].

La structure de commande hybride proposée dans ce mémoire est très proche de celle que nous avons introduite avec plusieurs auteurs dans [PTBC92] pour le cas des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 ou de celle proposée dans [BC93]. Les 2 différences principales sont

d'une part, le modèle du robot est ici linéarisé complètement grâce à une loi de bouclage dynamique. Dans [PTBC92] ou [BC93], le modèle du robot était linéarisé partiellement via une loi de bouclage statique.

d'autre part, un travail supplémentaire a été réalisé afin de garantir que les singularités des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 sont évitées, même lors des commutations.

Une autre loi hybride a été proposée dans [DD93] pour différents robots. Elle comporte une loi d'initialisation boucle ouverte ainsi qu'une loi de bouclage dynamique linéarisante, mais pas de loi de stabilisation le robot est juste stoppé brutalement lorsqu'il atteint la position désirée (i.e. les commandes sont ramenées de manière discontinue à zéro). Le problème des singularités a également été envisagé il est prouvé, par une intégration directe des équations du système en boucle fermée, qu'elles seront évitées lors du déplacement du robot. C'est une approche beaucoup plus directe que la nôtre, mais moins flexible afin de pouvoir intégrer les équations du système, la trajectoire de référence doit être la ligne droite joignant les positions initiales et finales parcourue à vitesse constante.

L'approche que nous proposons permet à l'inverse de suivre n'importe quelle trajectoire de référence. Elle peut également être adaptée pour commander des systèmes présentant des singularités autres que celles des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 (elle permet ainsi de garantir que les obstacles présents dans le plan d'évolution du robot seront évités). Cela est moins facile avec l'approche proposée dans [DD93].

Cette section se compose de 2 parties : à la section 4.3.2, nous détaillons le réglage des paramètres des 3 lois de commande composant la loi hybride ainsi que les 2 procédures de commutation. Les performances de cette loi sont ensuite illustrées par des simulations à la section 4.3.3.

4.3.2 Réglage des commutations et des paramètres de la loi hybride

Choix de la trajectoire de référence

Nous supposons dans cette section que la position finale du robot est $\phi = 0$. Cette hypothèse n'est absolument pas restrictive : il est en effet toujours possible, en spécifiant le repère immobile $[O, \vec{I}, \vec{J}]$, de faire en sorte que les coordonnées de la cible soient effectivement $\phi = 0$. La position initiale sera notée $\phi_0 = (x_0, y_0, \frac{\theta_0}{\sigma_1})^T$. Enfin, nous rappelons que compte tenu du choix proposé pour le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ lors de la modélisation des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , i.e. $P = S_1$ (cf. Théorème 2.13), le couple (x, y) désigne les coordonnées de S_1 dans $[O, \vec{I}, \vec{J}]$.

Les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 peuvent décrire n'importe quelle trajectoire $\phi_{ref}(t) = (x_{ref}(t), y_{ref}(t), \theta_{ref}(t))^T$. En effet, en faisant varier l'orientation (β_1, σ) des roues directrices, il est possible de donner n'importe quelle valeur à ϕ (voir modèle (2.67)). Le choix de la trajectoire de référence est donc guidé exclusivement par l'environnement du robot.

Si son plan d'évolution ne comporte aucun obstacle, la trajectoire de référence la plus naturelle est celle qui amène le point S_1 depuis (x_0, y_0) jusqu'à $(0, 0)$ par une ligne droite, pendant que le châssis du robot tourne sur lui-même de manière à amener également θ à 0 (voir Figure 4.1-droite). La loi horaire d'une telle trajectoire est donnée ci-dessous (relations (4.3)–(4.4)). Il sera montré qu'il est toujours possible de spécifier la vitesse de référence de telle sorte que cette trajectoire ne comporte pas de singularité (hypothèses (a) et (b) du Théorème 4.1).

Lorsque le plan d'évolution du robot comporte des obstacles, la construction d'une trajectoire de référence devient plus complexe. Pour la simulation décrite à la Figure 4.1 gauche, nous avons construit $(x_{ref}(t), y_{ref}(t))$ en joignant par interpolation polynomiale, un ensemble de points éloignés de l'obstacle. L'orientation du châssis le long de cette trajectoire, i.e. $\theta_{ref}(t)$, a été choisie tout simplement décroissante linéairement. Lorsque les obstacles sont plus nombreux, il faut avoir recours à des algorithmes de planification de trajectoires. Dans les 2 cas, la dernière étape dans la construction de la trajectoire de référence consiste à choisir une vitesse de référence qui assure que $\phi_{ref}(t)$ ne comporte pas de singularités (hypothèses (a) et (b) du Théorème 4.1).

Nous illustrons l'importance du choix de la vitesse de référence sur le cas d'un robot équipé de $n^d = 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, se déplaçant dans un environnement libre de tout obstacle. Nous considérons la trajectoire décrite ci-dessus : mouvement en ligne droite de S_1 combiné avec une rotation du châssis.

Le profil de vitesse le plus naturel est le suivant : tout d'abord une vitesse constante, puis quand le robot se rapproche de sa position finale, une vitesse décroissante. Ce profil exclut d'emblée les singularités $\eta_1 = 0$ (hypothèse (b) du Théorème 4.1) en effet, nous avons $\forall t \quad \dot{x}_{ref}^2(t) + \dot{y}_{ref}^2(t) \neq 0$, ce qui implique, voir modèle (2.68) par exemple, que $\forall t \quad \eta_{1,ref} \neq 0$. À l'inverse, il n'est pas garanti a priori que les singularités $|\sigma| \geq \sigma_l$ (hypothèses (a) du Théorème 4.1 et relation (4.37) ne sont pas rencontrées. Le choix des vitesses de référence permet d'obtenir cette garantie en utilisant le modèle (2.68), on montre que

$$\frac{|\dot{\theta}_{ref}(t)|}{\sqrt{\dot{x}_{ref}^2(t) + \dot{y}_{ref}^2(t)}} = |\sigma_{ref}(t)| \quad \forall t \quad (4.1)$$

En reportant (4.37) dans (4.2), on en déduit que la trajectoire de référence ne comporte aucune singularité si et seulement si les vitesses linéaires $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ et de rotation $\dot{\theta}(t)$ vérifient pour chaque instant t , la relation :

$$\frac{|\dot{\theta}_{ref}(t)|}{\sqrt{\dot{x}_{ref}^2(t) + \dot{y}_{ref}^2(t)}} \leq \sigma_l \quad \forall t \quad (4.2)$$

Une trajectoire de référence, amenant S_1 en ligne droite vers O pendant que le châssis se ré-orienté, présentant un profil de vitesse constant puis décroissant et vérifiant enfin la relation (4.2) est par exemple :

$$\text{Pour } T_d \leq t \leq T_{vd} \quad \begin{cases} x_{ref}(t) = x_0 - \frac{v x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(t - T_d) \\ y_{ref}(t) = y_0 - \frac{v y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(t - T_d) \\ \theta_{ref}(t) = \theta_0 - \frac{v \theta_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(t - T_d) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{Pour } T_{vd} < t \leq T_{tv} \quad \begin{cases} x_{ref}(t) = x_{ref}(T_{vd}) - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \left[\frac{(w-v)(t-T_{vd})^3}{3(T_{tv}-T_{vd})^2} + v(t-T_{vd}) \right] \\ y_{ref}(t) = y_{ref}(T_{vd}) - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \left[\frac{(w-v)(t-T_{vd})^3}{3(T_{tv}-T_{vd})^2} + v(t-T_{vd}) \right] \\ \theta_{ref}(t) = \theta_{ref}(T_{vd}) - \frac{\theta_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \left[\frac{(w-v)(t-T_{vd})^3}{3(T_{tv}-T_{vd})^2} + v(t-T_{vd}) \right] \end{cases} \quad (4.4)$$

avec T_d , T_{vd} , T_{tv} , v et w , 5 paramètres permettant d'adapter la trajectoire de référence au problème posé :

T_d : instant correspondant à la commutation depuis la loi d'initialisation boucle ouverte vers la loi de bouclage dynamique,

v : vitesse linéaire sur la première partie de la trajectoire de référence (on vérifie facilement que pour $t \in [T_d, T_{vd}]$, $\sqrt{\dot{x}_{ref}^2(t) + \dot{y}_{ref}^2(t)} = v$),

T_{vd} : instant où la vitesse de référence cesse d'être constante et commence à décroître,

T_{tv} instant correspondant à la commutation depuis la loi de bouclage dynamique vers la loi de bouclage instationnaire,

w valeur de la vitesse de référence à l'instant T_{ts} ,

et Θ , la constante définie par

$$\Theta = \text{sign}(\theta_0) \min \left(|\theta_0|, \sigma_1 \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right) \quad (4.5)$$

En reportant (4.5) dans (4.3) et (4.4), on vérifie facilement que la relation (4.2) est satisfaite. Enfin, la fonction $M(t)$ associée avec cette trajectoire de référence se déduit de (4.39).

La trajectoire de référence (4.3)–(4.4) est celle utilisée pour réaliser la simulation représentée sur la Figure 4.1-*gauche*.

Choix de la dynamique pour la poursuite de trajectoire

La convergence du robot vers la trajectoire de référence lors de l'utilisation de la loi de bouclage dynamique est décrite par le système linéaire (4.22). Le taux de convergence du vecteur Φ , de même que celui de toutes les variables d'état puisque celles-ci sont reliées à Φ par le difféomorphisme (4.19), est de façon évidente exponentiel. Il peut être réglé suivant les besoins de l'application pratique à l'aide des matrices H_1 et H_2 , la seule limitation étant de ne pas imposer un taux de convergence de Φ si rapide qu'il conduit à une saturation des moteurs.

Le choix de H_1 et H_2 détermine complètement la matrice \mathcal{A} , et donc, relation (4.36), la fonction $K(t)$.

Construction de la loi d'initialisation boucle ouverte

La loi d'initialisation boucle ouverte doit, entre les instants t_0 et $t = T_d$, amener le système jusqu'à une configuration $\Phi(T_d)$ satisfaisant la relation (4.25), de telle sorte qu'il soit garanti qu'aucune singularité ne sera rencontrée durant l'utilisation de la loi de bouclage dynamique (Théorème 4.2). Un grand nombre de techniques peut a priori être utilisé pour obtenir ce résultat. Celle que nous présentons ci-dessous paraît cependant la plus naturelle pour des systèmes tels que les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 .

La trajectoire de référence (équations (4.3)-(4.4)) est toujours construite en utilisant les conditions initiales du système. Ainsi, à l'instant $t = 0$, nous avons

$$x(0) = x_0 = x_{ref}(T_d) \quad y(0) = y_0 = y_{ref}(T_d) \quad \theta(0) = \theta_0 = \theta_{ref}(T_d) \quad (4.6)$$

De plus, puisqu'à l'instant initial, le robot est à l'arrêt, ré-orienter les roues directrices ne présente aucune difficulté technique. On peut donc supposer qu'à l'instant $t = 0$

$$\beta_1(0) = \beta_{1,ref}(T_d) \quad \sigma(0) = \sigma_{ref}(T_d) \quad (4.7)$$

Par conséquent, la seule variable du modèle étendu (4.14) qui ne soit pas, à l'instant $t = 0$, égale à sa valeur requise par la trajectoire de référence est η_1 , qui est égale à 0 (le

robot est à l'arrêt). Malheureusement, $\eta_1 = 0$ est précisément l'une des singularités de la loi de bouclage dynamique (hypothèse (b) du Théorème 4.1). Aussi, en définitive, la loi d'initialisation boucle ouverte doit sur l'intervalle de temps $[0, T_d]$ modifier la valeur de η_1 sans perturber les autres variables d'état du modèle étendu (4.14).

Nous proposons d'utiliser un simple mouvement marche arrière – marche avant

lorsque le robot est à l'arrêt, nous ré-orientons les roues directrices de telle façon que la relation (4.7) soit vérifiée.

pour $t \in [0, \frac{T_d}{2}]$, nous faisons décrire au robot un mouvement en marche arrière sans toucher à l'orientation des roues directrices. Le robot est de nouveau à l'arrêt à l'instant $t = \frac{T_d}{2}$. Il a alors décrit une petite portion de cercle.

pour $t \in]\frac{T_d}{2}, T_d]$, nous faisons repartir le robot en marche avant, toujours sans toucher à l'orientation des roues directrices. Le robot décrit la même portion de cercle, mais cette fois, dans le sens opposé. La configuration initiale $(x_0, y_0, \theta_0)^T$ sera par conséquent de nouveau rencontrée. En réglant la loi de commande boucle ouverte de telle façon que cette rencontre se produise pour $t = T_d$, nous aurons (en utilisant (4.6) et (4.7))

$$\begin{aligned} x(T_d) &= x_{ref}(T_d) & y(T_d) &= y_{ref}(T_d) & \theta(T_d) &= \theta_{ref}(T_d) \\ \beta_1(T_d) &= \beta_{1,ref}(T_d) & \sigma(T_d) &= \sigma_{ref}(T_d) \end{aligned}$$

En utilisant (4.19), nous en déduisons que

$$\|\tilde{\phi}(T_d)\| = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{ref}^2(T_d)}{\sigma_f^2}} |\eta_1(T_d) - \eta_{1,ref}(T_d)| \quad (4.8)$$

Un calcul élémentaire fournit enfin la valeur minimale positive de $\eta_1(T_d)$, notée $\eta_{1,min}$, telle que la relation (4.25) soit satisfaite pour $t_0 = T_d$ ($M(t)$ et $K(t)$ sont en effet des fonctions connues, voir ci-dessus). Imposer à l'aide d'une loi boucle ouverte la position et la vitesse du robot à l'instant $t = T_d$ ne pose aucune difficulté; il suffit par exemple d'utiliser une loi polynomiale en temps de degré suffisant. La loi d'initialisation boucle ouverte est alors complètement spécifiée.

Choix du cône D utilisé par la loi de bouclage instationnaire

La loi de bouclage instationnaire proposée par le Théorème 4.4 assure l'évitement des singularités et la convergence du robot vers la configuration $\phi = 0$, à la condition qu'à l'instant initial, c'est-à-dire dans notre cas à l'instant $t = T_{iv}$, le vecteur \tilde{P} représentant l'orientation des roues directrices (relation (4.47)) appartient au cône D décrit par la Définition 4.2. L'orientation des roues directrices à l'instant $t = T_{iv}$ est déterminée essentiellement par la trajectoire de référence (on peut en effet supposer qu'à l'instant $t = T_{iv}$ le robot a rejoint cette trajectoire). Le choix de cette dernière étant totalement libre, il n'est pas garanti que nous ayons effectivement $\tilde{P}(t = T_{iv}) \in D$.

La Définition 4.2 pour le cône D , comme cela est montré à la Remarque 4.1, peut cependant être modifiée : la seule contrainte sur le choix de D est que ce cône ne contienne pas de singularité. Nous proposons pour la loi hybride d'utiliser la définition suivante

Pour les robots ne comportant que $n^{\text{dt}} = 2$ roues directrices ou $n^{\text{dt}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés

→ si $\cos \tilde{\beta}(T_{tv}) \sin \beta_1(T_{tv}) > 0$, alors le cône D que nous utiliserons est centré sur \tilde{P}_a et présente une ouverture au centre $\tilde{\beta}_l$ avec

$$\begin{aligned}\tilde{P}_a &= (1, 0, 0)^T \\ \tilde{\beta}_l &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

→ si $\cos \tilde{\beta}(T_{tv}) \sin \beta_1(T_{tv}) < 0$, alors le cône D que nous utiliserons est centré sur \tilde{P}_a et présente une ouverture au centre $\tilde{\beta}_l$ avec

$$\begin{aligned}\tilde{P}_a &= (-1, 0, 0)^T \\ \tilde{\beta}_l &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

→ $\cos \tilde{\beta}(T_{tv}) \sin \beta_1(T_{tv}) = 0$ correspond à une orientation singulière des roues directrices (relation (4.49)). La loi de bouclage dynamique garantissant qu'à l'instant $t = T_{tv}$, l'orientation des roues directrices n'est pas singulière, ce cas de figure ne peut pas se produire.

Pour les robots comportant $n^{\text{dt}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, le cône D que nous utiliserons est centré sur \tilde{P}_a et présente une ouverture au centre $\tilde{\beta}_l$ avec

$$\begin{aligned}\tilde{P}_a &= (\cos \tilde{\beta}(T_{tv}) \sin \beta_1(T_{tv}), -\cos \tilde{\beta}(T_{tv}) \cos \beta_1(T_{tv}), 0)^T \\ \tilde{\beta}_l &= \frac{\pi}{4} \iff \sigma = \sigma_l\end{aligned}$$

On vérifie facilement d'une part, que les cônes D définis ci-dessus ne renferment aucune singularité de ${}^2\tilde{\mathcal{O}}_s$ ou de ${}^3\tilde{\mathcal{O}}_s$ (relations (4.49) ou (4.48)), et d'autre part, que $\tilde{P}(T_{tv})$ appartient toujours à ces cônes (pour le cas $n^{\text{dt}} \geq 3$ et S_i non alignés, la loi de bouclage dynamique, puisqu'elle garantit que les singularités sont évitées, assure en effet que $|\tilde{\beta}(T_{tv})| \leq \frac{\pi}{4}$). La loi de bouclage instationnaire peut donc être utilisée sans restriction et assure la convergence de ϕ vers 0 et l'évitement des singularités. La seule différence par rapport aux conclusions du Théorème 4.4 est que les valeurs finales de β_1 et $\tilde{\beta}$ ne seront plus $\frac{\pi}{2}$ et 0 mais $\beta_1(T_{tv})$ et $\tilde{\beta}(T_{tv})$. L'orientation finale des roues directrices étant sans intérêt pour l'utilisateur, ce changement est sans importance.

Ces nouvelles définitions pour le cône D ne sont pas plus restrictives que celle donnée par la Définition 4.2 : il est en effet immédiat que la surface de ces nouveaux cônes sur la sphère unité est identique à celle du cône donné par la Définition 4.2, le vecteur \tilde{P} possède donc la même liberté de variation. Nous avons retenu la Définition 4.2 dans le Théorème 4.4 juste pour ne pas alourdir la preuve de ce théorème avec des variables supplémentaires.

Oscillations du robot pendant l'utilisation de la loi de bouclage instationnaire

La principale faiblesse des lois de bouclage instationnaire est, qu'en raison de la présence d'une excitation périodique en temps (le terme $g(t, \phi)$ pour la loi (4.53) proposée par le Théorème 4.4), les trajectoires du système sont très oscillantes (voir par exemple les Figures 4.4 et 4.12). Cependant, le fait que ce type de lois soit utilisé au sein d'une commande hybride réduit très significativement cette faiblesse.

Tout d'abord, au vu de la relation (4.56), les oscillations du robots pendant l'utilisation de la loi de bouclage instationnaire sont nécessairement confinées dans un disque de rayon $\|\phi(T_{lv})\|$ autour de la configuration finale. Cette borne est en fait très large, car à l'instant $t = T_{lv}$, le robot est dans une configuration optimale pour atteindre la configuration désirée : en effet, à $t = T_{lv}$ la trajectoire du robot coïncide presque parfaitement avec la trajectoire de référence, qui par construction, amène le robot en ligne droite vers O . Si la vitesse de référence w (équations (4.4)) est choisie de telle manière que l'évolution de la variable η_1 soit continue lors de la commutation depuis le bouclage dynamique vers le bouclage instationnaire (ce choix est toujours possible), alors la trajectoire du robot ne connaît pas de brusque variation dans les premiers instants qui suivent T_{lv} , il continue à avancer selon la ligne droite. Soit T_{os} l'instant où le robot commence à osciller. On déduit de (4.56) que les oscillations sont confinées dans un disque de rayon $\|\phi(T_{os})\|$ autour de la configuration finale.

Plus T_{lv} est proche de l'instant où $(x_{ref}(t), y_{ref}(t), \dot{x}_{ref}(t), \dot{y}_{ref}(t))$ sont égaux à leur valeur finale $(0, 0, 0, 0)$, plus les 2 disques décrits ci-dessus présentent un rayon petit. Cependant, plus le robot s'approche de la position finale, plus il se rapproche de la singularité $\eta_1 = 0$ de la loi de bouclage dynamique (hypothèse (b) du Théorème 4.1). Les commandes demandées aux actionneurs tendent alors vers l'infini. Aussi le choix de T_{lv} est dicté par les possibilités des actionneurs.

4.3.3 Simulations de la loi hybride

Description des simulations

Dans cette section, nous avons simulé la loi hybride sur l'exemple d'un robot équipé de 3 roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, et pour lequel la dimension caractéristique $\sigma_l = 1 \text{ m}^{-1}$. Deux simulations ont été réalisées :

Pour la première, nous avons supposé qu'il n'y avait aucun obstacle dans le plan d'évolution du robot. La trajectoire de référence (4.3)-(4.4) a été utilisée, avec les paramètres suivants

configuration initiale $(x_0, y_0, \theta_0) = (10 \text{ m}, 10 \text{ m}, \frac{\pi}{2} \text{ rad})$

instants de commutations $(T_d, T_{sd}, T_{lv}) = (1 \text{ s}, 12 \text{ s}, 14.8 \text{ s})$

vitesse de référence $(v, w) = (1 \text{ m.s}^{-1}, 0.68 \text{ m.s}^{-1})$

Tous ces paramètres, excepté T_{lv} et w , ont été choisis arbitrairement, dans le seul but d'obtenir une trajectoire réaliste. Les 2 derniers paramètres ont à l'inverse été construits

de manière à ce que la variable η_1 soit continue lors de la commutation depuis la loi de bouclage dynamique vers la loi de bouclage instationnaire, i.e. à $t = T_{lv}$. Pratiquement, nous avons calculé $\phi_{ref}(T_{lv})$ pour différents couples (T_{lv}, w) jusqu'à ce que $\eta_{1,ref}(T_{lv})$ soit égal à la commande η_1 donnée par la loi de bouclage instationnaire (4.52)). La fonction $M(t)$ associée à cette trajectoire s'écrit (il suffit de reporter (4.3)-(4.4) et (4.19) dans (4.39))

$$\begin{cases} \text{For } t \in [T_{df}, T_{vd}] & M(t) = 0.6286 \\ \text{For } t \in]T_{vd}, T_{lv}[& M(t) = 0.6286 \left((w - v) \frac{(t - T_{vd})^2}{(T_{lv} - T_{vd})^2} + v \right) \end{cases}$$

Les matrices H_1 et H_2 , déterminant le taux de convergence de la loi de bouclage dynamique ont été choisies égales respectivement à $6.4 \text{ Id}_{3 \times 3}$ et $4 \text{ Id}_{3 \times 3}$. Ce réglage correspond à un temps de réponse à 5 % égal à 5 secondes pour chacune des fonctions de sorties. La fonction $K(t)$ est alors donnée par (4.36), et enfin, en choisissant $\varepsilon = 0.01$, on obtient à l'aide des relations (4.25) et (4.8) que $\eta_{1,min} = 0.5313 \text{ m.s}^{-1}$

Pour la seconde simulation, nous avons supposé qu'un disque de rayon $r = 1 \text{ m}$, centré sur $(6.25\text{m}, 6.25\text{m})$ (dans le repère $[O, \vec{I}, \vec{J}]$) était présent dans le plan d'évolution du robot (voir Figure 4.1-droite). La trajectoire de référence a été construite en joignant par interpolation polynomiale des points éloignés de l'obstacle. Le calcul de $\eta_{1,min}$ utilise cette fois la relation (4.41) au lieu de la relation (4.25).

Résultats de simulation

La Figure 4.1 présente la trajectoire cartésienne du robot dans le cas où il n'y a pas d'obstacle (Figure 4.1-gauche) puis dans le cas où l'obstacle décrit ci-dessus est présent (Figure 4.1-droite). La Figure 4.2 ne présente par contre que les résultats de simulation pour le cas sans obstacle.

Dans les 2 simulations, le mouvement général du robot apparaît très naturel le robot se déplace en ligne droite vers la configuration finale lorsque cela est possible, ou en contournant d'une manière C^∞ les obstacles lorsque ceux-ci sont présents. On constate que la loi de bouclage instationnaire n'engendre aucune oscillation visible. Celles-ci apparaissent en fait à partir de $t = T_{os} = 20 \text{ s}$. Cependant, à cet instant, une précision satisfaisante d'un point de vue pratique a déjà été obtenue. Nous avons en effet

$$(x(T_{os}), y(T_{os}), \theta(T_{os})) = (-0.0042 \text{ m}, 0.0094 \text{ m}, 0.0243 \text{ rad}) \quad (4.9)$$

La loi de commande hybride peut par conséquent être arrêtée (l'erreur est minime sachant que le robot est parti initialement d'une distance de $10\sqrt{2} \text{ m}$ de la configuration désirée). S'il était nécessaire, la précision pourrait être accrue en continuant d'utiliser la loi de bouclage dynamique au-delà de $t = T_{os}$. L'apparence générale de la trajectoire n'en serait pas dégradée car les oscillations du robot seraient confinées, au vu de (4.9) et (4.56), dans un disque de rayon 0.0264 m autour de la configuration désirée.

La Figure 4.2-gauche met en évidence que la trajectoire du robot rattrape puis suit la trajectoire de référence avec une très bonne précision. En effet, comme attendu, l'erreur

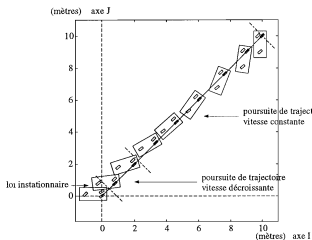
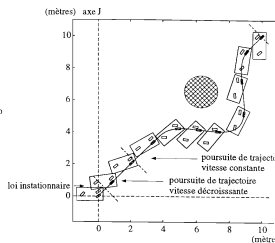


Figure 4.1: Trajectoire cartésienne du robot
gauche Trajectoire sans obstacle



droite Trajectoire en présence d'un obstacle

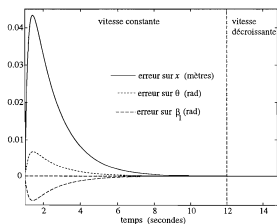
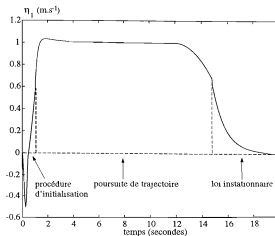


Figure 4.2: Cas sans obstacle
gauche Evolution de \hat{x} , $\hat{\theta}$ et $\hat{\beta}_1$



droite Evolution de η_1

sur chaque variable d'état converge exponentiellement vite vers zéro. Les erreurs sur y et σ n'ont pas été représentées car la première est identique à celle de x et la seconde reste égale à zéro pendant tout le temps où la loi de bouclage dynamique est utilisée, prouvant ainsi que les singularités décrites par (4.37) sont évitées (hypothèse (a) du Théorème 4.1). La Figure 4.2-droite enfin met en évidence, que d'une part nous avons réussi à obtenir une variation continue de η_1 , et que d'autre part η_1 est resté différent de zéro pendant toute la durée d'utilisation de la loi de bouclage dynamique (hypothèse (b) du Théorème 4.1).

Chapitre 5

Commande en présence de glissements

Les lois de bouclage proposées au Chapitre 4 ont été construites en supposant que les robots mobiles vérifiaient plusieurs ensembles d'hypothèses

Hypothèses 2.1 décrivent la structure des robots et de leur environnement,

Hypothèses 2.2 : roulement pur sans glissement,

Hypothèses 2.7 : les paramètres inertiels sont connus,

Hypothèses 2.8 les robots sont complètement actionnés.

Chaque groupe d'hypothèses a été discuté : les Hypothèses 2.1 et 2.2 ont été discutées à la section 2.1, les Hypothèses 2.7 et 2.8 l'ont été à la section 2.3.3.c. Il est alors apparu que celles qui ouvraient le plus à débat étaient les Hypothèses 2.7 et 2.2. La mauvaise connaissance des paramètres inertiels est un problème général en commande des systèmes, et a donné lieu à une abondante littérature. Le problème posé par le glissement des roues sur le sol est à l'inverse spécifique aux robots mobiles à roues et a été jusqu'à présent peu étudié. Aussi, dans ce mémoire, nous n'envisagerons pas les problèmes de robustesse paramétriques, i.e. nous conservons l'Hypothèse 2.7. Nous donnons juste, page 55, quelques pistes pour les aborder dans le cas des robots mobiles. Nous étudions par contre les phénomènes de glissement, i.e. nous relâchons l'Hypothèse 2.2. La modélisation des robots mobiles à roues en présence de glissement a été discutée au Chapitre 3. Dans ce chapitre, sur la base des résultats obtenus au Chapitre 3, nous étudions la commande des robots mobiles à roues lorsque les hypothèses de roulement pur sans glissement ne sont pas satisfaites.

Plus précisément, à la section 5.1, nous décrivons les résultats proposés dans la littérature pour la commande des robots mobiles à roues en présence de glissement. Ceux-ci peuvent être séparés en 2 catégories : certains de ces résultats proposent des outils permettant d'évaluer la robustesse des lois de commande proposées pour les robots mobiles sous les Hypothèses 2.2, lorsque ces hypothèses sont relâchées (section 5.1.1). Les autres proposent des techniques de commande qui prennent en compte le phénomène de glissement (section 5.1.2). A la section 5.2, nous nous plaçons dans cette seconde optique.

Nous considérons le cas des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 , c'est-à-dire les robots dont les équations sont les plus simples, et nous recherchons, en prenant en compte les glissements, à assurer la poursuite d'une trajectoire pré-spécifiée ne présentant pas de position d'arrêt. Ce dernier point est imposé, non plus par l'obstruction de Brockett, mais simplement parce que nous ne connaissons pas de modèle de glissement lorsque la vitesse du robot est nulle (cf. Chapitre 3). C'est pour cette raison également que nous ne proposons pas de loi de stabilisation. Cette section est organisée comme suit : à la section 5.2.1, nous détaillons, en nous appuyant sur le Chapitre 3, le modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 rendant compte du phénomène de glissement. Nous proposons ensuite, section 5.2.2, une loi de poursuite de trajectoires pour le modèle cinématique, basée sur des techniques de linéarisation exacte, comme précédemment à la section 4.1. La robustesse de cette loi vis à vis des conditions de contact est assurée grâce à un schéma adaptatif. Enfin, à la section 5.2.3, nous considérons le modèle dynamique du robot. Nous montrons tout d'abord que le schéma adaptatif ne permet plus de garantir la robustesse de la loi de poursuite de trajectoire vis à vis des conditions de contact. Nous proposons alors une loi empirique, dont les performances sont illustrées par des simulations. Ce travail a fait l'objet d'un rapport, [TAM95a].

5.1 Résultats existants

Dans cette section, nous poursuivons l'étude bibliographique commencée au Chapitre 3.

Dans ce chapitre, nous avons présenté et comparé différents articles où le problème de la modélisation des phénomènes de glissements était abordé. Nous reprenons maintenant ces travaux, et présentons les techniques proposées par leurs auteurs pour tenir compte du glissement dans la commande des systèmes étudiés. Cette étude est divisée en 2 parties : à la section 5.1.1, nous présentons l'approche perturbations singulières proposée dans [ACB95b]. Cette approche est utilisée comme un outil pour évaluer la robustesse des lois de commande construites sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, lorsque ces hypothèses ne sont plus vérifiées. Les autres auteurs mentionnés au Chapitre 3 suivent une autre démarche : ils proposent des lois de bouclage qui prennent explicitement en compte le phénomène de glissement. Ces lois sont présentées à la section 5.1.2.

5.1.1 Analyse par perturbations singulières de la robustesse des lois de commande construites sous les Hypothèses 2.2

L'utilisation des perturbations singulières pour analyser la robustesse des lois de bouclage calculées sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, lorsqu'elles sont appliquées sur un robot mobile qui peut déraiser, a été proposée initialement dans [ACB95b], et a été illustrée par le rapport de stage [Ren93].

Le modèle proposé dans [ACB95b] pour rendre compte des glissements d'un robot mobile est décrit à la section 3.2.1 : lorsque les hypothèses de roulement pur sans glissement ne sont pas satisfaites, le modèle générique d'un robot mobile à roues (i.e. l'équivalent du modèle (2.51) obtenu lorsque les Hypothèses 2.2 sont vérifiées) est donné par le système (3.77). La constante ε , qui apparaît dans ce modèle, est un paramètre petit qui,

au vu de (3.75), mesure l'écart entre le système réel et les hypothèses de roulement pur sans glissement. En particulier, si $\varepsilon = 0$, le modèle (3.77) est alors exactement identique au modèle (2.51). Le problème de la robustesse d'une loi de commande calculée sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement peut alors être formulé comme suit

Soit $u(q, \eta, t)$, une loi de commande calculée pour le système sans glissement (2.51).

Cette loi est robuste si, pour le paramètre ε du modèle avec glissement (3.77), il existe une valeur ε_{\max} , telle que la trajectoire du modèle avec glissement (3.77), sous l'effet de la loi $u(q, \eta, t)$, reste dans un voisinage de la trajectoire du modèle sans glissement (2.51) auquel on aurait appliqué la même loi $u(q, \eta, t)$.

La commande $u(q, \eta, t)$ dont la robustesse est analysée dans [ACB95b], est la loi de poursuite de trajectoires proposée par ces mêmes auteurs dans [ACB95a] il s'agit d'une loi de retour d'état statique qui linéarise de manière exacte une partie des équations du modèle (2.51) (celle correspondant à la position cartésienne du robot et à sa dérivée). Cette loi assure d'une part, la convergence exponentielle de la position du robot vers la position spécifiée par la trajectoire de référence, et d'autre part la bornitude des variables non-linéarisées (comme l'orientation θ par exemple).

Il est prouvé dans [ACB95b], à l'aide d'une approche perturbations singulières (voir [KKO86] ou [Kha92, Ch. 8] par exemple), que cette loi est robuste au sens défini ci dessus. Plus précisément, il est montré que ([ACB95b, Th. 3]) sous quelques hypothèses (très peu restrictives en pratique) sur la force de contact roues-sol $F(q, \dot{q})$, le modèle avec glissement (3.77), lorsqu'il est commandé par la loi de linéarisation partielle, est sous forme standard pour les théorèmes de Tikhonov. Ces derniers assurent

- l'existence d'une erreur initiale maximale entre la configuration du robot et la trajectoire de référence,
- l'existence d'une condition de contact limite ε_{\max} ,

telles que la trajectoire cartésienne du modèle avec glissement (3.77), lorsque celui-ci est commandé par la loi de linéarisation partielle, reste pour tout instant t dans un voisinage de taille $O(\varepsilon)$ autour de la trajectoire cartésienne du modèle sans glissement (2.51), lorsque celui-ci est commandé par la même loi. Une dernière démonstration permet alors de montrer que toutes les variables du modèle (3.77), comme celles précédemment du modèle (2.51), sont bornées. Ces résultats ne sont toutefois que qualitatifs, la valeur de ε_{\max} par exemple n'est pas calculée explicitement. Des simulations, présentant la poursuite d'une droite, puis d'un cercle, par un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 illustrent cette robustesse.

La méthodologie développée dans [ACB95b] pour analyser la robustesse de la loi de linéarisation partielle, peut très certainement être utilisée pour évaluer la robustesse d'autres lois de commande. Dans [Ren93], des simulations identiques à celles décrites dans [ACB95b], ont été réalisées pour des robots appartenant aux classes \mathcal{R}_0^2 et \mathcal{R}_1^1 , avec une loi de retour d'état dynamique linéarisant complètement le modèle sans glissement (2.51). Aucune preuve de robustesse n'est présentée, cependant les simulations montrent un comportement identique à celui observé dans [ACB95b] avec la loi de linéarisation partielle.

La loi dynamique apparaît en fait légèrement plus robuste que la loi statique. Cela tient certainement au fait qu'avec la première loi, *toutes* les variables du modèle (2.51) sont linéarisées et par conséquent commandées.

Ces résultats de robustesse sont très encourageants. Les lois de poursuite de trajectoire par linéarisation, dont nous avons discuté à la section 4.1, apparaissent naturellement robustes par rapport aux glissements. Si maintenant l'on souhaite être très précis, c'est-à-dire ne plus converger vers un voisinage de la trajectoire de référence, mais vers cette trajectoire, et ce en dépit des glissements, les lois de la section 4.1 ne sont bien sûr plus satisfaisantes. Il faut prendre en compte explicitement ces glissements dans le calcul de la loi de commande. Dans le reste de ce chapitre, nous nous intéressons à ce problème.

5.1.2 Synthèse de lois de bouclage prenant en compte les phénomènes de glissement

Nous présentons, dans cette section, les lois proposées par les différents auteurs mentionnés au Chapitre 5.

Lois de commande proposées dans [All94]

Dans [All94], l'objectif de l'auteur est de construire, pour un véhicule dont seules les 2 roues avant sont orientables, une loi de commande qui réalise de façon autonome la manœuvre de changement de voie, dans l'optique du dépassement d'un véhicule roulant moins vite. Cette loi est recherchée dans le but de déterminer si un dépassement est faisable ou non (les travaux présentés dans [All94] ont été réalisés dans le cadre du projet d'assistance à la conduite PROMETHEUS).

Le modèle d'une voiture proposé dans [All94] est très complet : il rend compte (voir page 146) des glissements, du roulis, des déports de charge, des forces aérodynamiques,. Ce modèle est utilisé pour éprouver en simulation les lois de commande proposées, par contre ces dernières sont construites sur un modèle beaucoup plus simple, où seule apparaît la dynamique horizontale du véhicule (pas de roulis, pas de déports de charge, ...). Ce modèle simplifié est très semblable au modèle (3.101)(3.102)(3.103) proposé dans [MCH91]. Deux techniques de commande sont considérées successivement dans [All94] : la première consiste à calculer une approximation linéaire de ce modèle, et d'en déduire des lois de commande linéaires. La seconde consiste en une linéarisation exacte du modèle.

Utilisation du linéarisé tangent du modèle de la voiture

Si l'on suppose, d'une part que la vitesse de la voiture est constante ($V = V_1$) pendant la manœuvre de dépassement, et d'autre part que l'angle de braquage des roues est faible (de sorte que V_y et ω restent voisins de 0), il est alors possible de raisonner non plus sur le modèle non-linéaire de la voiture, mais sur son linéarisé tangent autour de la configuration

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_m \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec C_m et α les 2 commandes, respectivement le couple moteur ou freineur appliqué aux roues avant et leur orientation (les roues arrière sont non-orientées). Une propriété remarquable de ce linéarisé tangent est qu'il est découplé : la commande C_m n'agit que sur V_x , tandis que la seconde commande α n'agit que sur V_y et ω . Ce linéarisé tangent étant commandable (à la condition que $V_1 \neq 0$), on peut pour le commander utiliser n'importe quelle technique de commande linéaire. Dans [All94], l'auteur propose d'utiliser différentes techniques de placement de pôles.

La principale faiblesse de cette approche est que l'on s'est placé à vitesse constante. Or dans une manœuvre de dépassement, il est naturel d'accélérer. Aussi, si l'on veut dans la pratique, utiliser ce type de loi de commande, il faudrait recalculer périodiquement le linéarisé tangent au fur et à mesure que la vitesse de la voiture augmente, ce qui est assez contraignant et fait perdre beaucoup des avantages de la loi linéaire (principalement son temps de calcul très court).

Une autre loi, basée sur le linéarisé tangent du modèle de la voiture, est également proposée dans [All94]. Il s'agit d'une commande boucle ouverte réalisant la manœuvre de dépassement en un temps T laissé au libre choix du conducteur. La loi proposée est très simple (l'évolution du vecteur d'état en fonction du temps est choisie polynomiale, le calcul de la commande se résume alors à quelques manipulations algébriques), très performante lorsqu'elle est simulée sur le linéarisé tangent du modèle qui a servi à son calcul, mais très peu robuste (comme toute commande boucle ouverte). Comme d'une part on ne peut pas supposer connues les rigidités de dérive D des roues, et que d'autre part que le modèle sur lequel est calculé la commande est très approché (ce n'est ni le modèle complet, ni le modèle horizontal, mais uniquement son linéarisé tangent), le manque de robustesse de cette seconde loi empêche son utilisation en pratique.

Utilisation du modèle non-linéaire de la voiture

Afin de pouvoir faire varier plus librement la vitesse de la voiture lors du dépassement, une seconde approche, basée cette fois-ci sur le modèle horizontal non-linéaire de la voiture, est proposée dans [All94]. Il est montré que ce modèle peut être partiellement linéarisé de manière exacte, en considérant comme fonctions de sortie la vitesse d'avancement et le déplacement latéral, et en utilisant l'algorithme d'extension dynamique présenté page 154 à la section 4.1. Une analyse complémentaire prouvant que la partie non linéarisée est asymptotiquement stable, cette commande peut être utilisée sans réserve. Des résultats de simulation montrent une bonne robustesse naturelle de ce type de loi. Cependant l'auteur insiste sur le fait que le temps de calcul de la loi non-linéaire est plus long que celui de la loi linéaire mentionnée plus haut, ce qui, suivant les conditions d'utilisation, peut poser parfois quelques problèmes.

Lois de commande proposées dans [Ack93]

Comme cela a été présenté à la page 126, l'objectif de l'auteur dans [Ack93] est de contrôler la dynamique latérale d'une voiture à 4 roues directrices lorsque celle-ci se déplace à vitesse constante. Le modèle proposé dans [Ack93], calculé à partir du schéma simplifié représenté sur la Figure 3.19, correspond aux équations (3.119).

La commande traditionnellement utilisée pour contrôler la dynamique latérale d'une voiture est

$$\begin{cases} \alpha_f &= \alpha_{f,ref} \\ \alpha_r &= 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $\alpha_{f,ref}$, la commande d'orientation des roues avant, spécifiée par le conducteur via le volant. Les faiblesses de cette commande sont mises en évidence dans [Ack93]. Le linéarisé tangent du système (3.119) commandé par la loi (5.1) montre que

les valeurs propres du système bouclé ainsi obtenu sont stables, mais se rapprochent de l'axe imaginaire lorsque la vitesse de la voiture augmente.

Ce système étant d'ordre 2, il est possible de raisonner également en terme d'amortissement et de pulsation propre. Un rapide calcul montre que tous deux dépendent de la vitesse de la voiture.

la force transversale F_y engendrée sur les roues avant, dépend bien sûr de l'orientation des roues avant, i.e. de α_f , mais aussi, ce qui est moins naturel, de la vitesse de rotation de la voiture ω .

Si l'on écrit enfin la fonction de transfert entre F_y et $\alpha_{f,ref}$, on obtient une fonction du second ordre, dont les pôles, se rapprochent également de l'axe imaginaire quand la vitesse de la voiture augmente.

Deux loi de retour d'état, l'une pour la commande en orientation des roues avant (i.e. α_f), l'autre pour la commande en orientation des roues arrière (i.e. α_r), sont proposées dans [Ack93] pour éliminer ces faiblesses.

Le premier retour d'état proposé commande en fait, non pas α_f , mais sa dérivée, ce qui, compte tenu de l'inertie du mécanisme d'orientation des roues, n'est absolument pas restrictif, bien au contraire. Cette première commande permet

de faire disparaître ω dans la dynamique de la force transversale F_y . Si on linéarise le système en boucle fermée ainsi obtenu, on constate que la fonction de transfert reliant F_y à la commande α_f est un simple premier ordre, dont la constante de temps peut être rendue invariante par rapport à la vitesse du véhicule par un simple pré-filtrage de la commande. Ce passage du second au premier ordre, et la disparition de la vitesse dans l'expression des pôles font que le comportement latéral de la voiture devient beaucoup plus facile à appréhender pour le conducteur (qui contrôle α_f via son volant).

d'obtenir, pour le polynôme caractéristique du linéarisé tangent du système bouclé ainsi obtenu, une pulsation propre indépendante de la vitesse de la voiture. Par contre, l'amortissement continue à en dépendre.

Le second retour d'état proposé est une commande pour l'orientation des roues arrière, i.e. α_r . L'auteur montre que cette commande

n'affecte absolument pas la dynamique de F_y , qui reste un premier ordre, indépendant de la vitesse de la voiture.

élimine complètement la dépendance en la vitesse de la voiture pour le polynôme caractéristique du linéarisé tangent du système en boucle fermée la pulsation propre et l'amortissement sont tous deux indépendants de cette vitesse, ce qui améliore très sensiblement la sécurité lors de la conduite du véhicule.

Loi de commande proposées dans [MT92]

Comme dans [Ack93], l'objectif des auteurs dans [MT92] est de contrôler la dynamique latérale d'une voiture lorsque celle-ci se déplace à vitesse constante. Le modèle proposé dans [MT92], calculé à partir du schéma de voiture représenté sur la Figure 3.18, correspond aux équations (3.104) et (3.105).

La loi de commande proposée dans [MT92] est construite en 2 étapes. La première consiste à rechercher quelles sont les entrées les plus pertinentes pour contrôler la dynamique latérale d'une voiture parmi l'orientation des roues avant α_f , des roues arrière α_r , la différence entre le couple appliqué sur la roue avant droite et celui appliqué sur la roue avant gauche (cette différence agit sur $F_{x,1} - F_{x,2}$), la différence entre le couple appliqué sur la roue arrière droite et celui appliqué sur la roue arrière gauche (cette différence agit sur $F_{x,3} - F_{x,4}$). La méthode proposée pour procéder à ce choix d'entrées est la suivante si on néglige dans (3.105) les termes du second ordre comme $F_{y,4}\alpha_f$, et si on considère que les sommes $F_{x,1} + F_{x,2}$ et $F_{x,3} + F_{x,4}$ sont constantes (puisque la vitesse de la voiture est supposée constante), alors les équations (3.104) et (3.105) forment un système linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_y \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_y \\ \omega \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \\ F_{x,1} - F_{x,2} \\ F_{x,3} - F_{x,4} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

On montre facilement que la matrice A est stable. Le vecteur d'état $(V_y, \omega)^T$, par conséquent, tend asymptotiquement vers

$$\begin{pmatrix} V_y \\ \omega \end{pmatrix} = A^{-1}B \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \\ F_{x,1} - F_{x,2} \\ F_{x,3} - F_{x,4} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Si maintenant, pour chaque couple d'entrées possibles, on calcule, via (5.3), l'ensemble des valeurs que peut atteindre le vecteur d'état $(V_y, \omega)^T$ lorsque les commandes prennent toutes les valeurs possibles, on obtient que le choix d'entrées qui offre à $(V_y, \omega)^T$ la plus grande plage de variation, et qui sera à ce titre jugé le plus pertinent, est (α_f, α_r) .

La seconde étape est la construction proprement dite de la loi de commande. Les entrées étant bien sûr α_f et α_r , nous avons par conséquent $F_{x,1} - F_{x,2} = F_{x,3} - F_{x,4} = 0$. Le système (5.2) se présente donc sous la forme d'un système linéaire à 2 états et 2 commandes. Un retour d'état linéaire quadratique, paramétré par la vitesse du véhicule et par les conditions de contact roues-sol (i.e. les D^*), est proposé pour contrôler ce système. La vitesse du véhicule est mesurée en ligne, quant aux conditions de contact, les auteurs proposent de les estimer en temps réel par un algorithme adaptatif de type moindres carrés.

Loi de commande proposée dans [MCH91]

L'objectif des auteurs est encore une fois de contrôler la dynamique latérale d'une voiture lorsque celle-ci se déplace à vitesse constante. Le modèle proposé dans [MCH91], calculé à partir du schéma simplifié représenté sur la Figure 3.19, correspond aux équations (3.101)(3.102)(3.103).

La loi de retour d'état proposée dans [MCH91] pour résoudre ce problème paraît purement intuitive, aucune preuve de sa convergence n'est donnée dans l'article. Le principe est le suivant : soit $erreur_f$, $erreur_r$ et $erreur_\theta$ respectivement la distance entre G_f (voir Figure 3.19) et son projeté sur la trajectoire à suivre, la distance entre G_r (voir Figure 3.19) et son projeté sur la même trajectoire, et l'angle entre l'axe longitudinal du véhicule et la tangente à la trajectoire en G , projeté de G (voir Figure 3.19) sur cette trajectoire. Un rapide croquis montre que le retour d'état suivant engendre toujours un mouvement vers la trajectoire de référence

$$\begin{cases} \alpha_f &= k_1 erreur_f + k_2 erreur_\theta \\ \alpha_r &= k_1 erreur_r + k_2 erreur_\theta \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont 2 constantes ajustées en simulations. Nous ignorons si cette loi est étayée par une étude théorique. Les simulations présentées dans [MCH91] sont en tout cas très convaincantes.

Loi de commande proposée dans [Lee92]

L'objectif de l'auteur est toujours de contrôler la dynamique latérale d'une voiture lorsque celle-ci se déplace à vitesse constante. Le modèle proposé dans [Lee92], calculé à partir du schéma simplifié représenté sur la Figure 3.19, correspond aux équations (3.106) à (3.114).

La loi de commande proposée par [Lee92] n'est pas une loi de retour d'état. Son principe est le suivant : l'information fournie par une caméra placée sur la voiture est utilisée pour calculer en temps réel la courbure de la trajectoire de référence (une ligne blanche peinte sur le sol par exemple) juste devant le véhicule, mais aussi en plusieurs points régulièrement espacés, en amont du véhicule. Cette information est ensuite reportée dans un algorithme qui calcule les commandes optimales pour que la voiture suive la trajectoire désirée. Cette loi de commande n'est pas un retour d'état, car il y a prédiction : elle utilise l'information sur la trajectoire de référence à l'instant présent, mais aussi aux instants futurs.

Loi de commande proposée dans [TC91]

L'objectif des auteurs dans [TC91] (voir page 128) est cette fois de contrôler la dynamique longitudinale d'une voiture se déplaçant en ligne droite, en assurant que la variable de glissement g ne quitte jamais la zone de pseudo-glissement (i.e. $|g| < g_s$) (pour des raisons évidentes de sécurité). Dit autrement, les auteurs ont pour objectif de construire une loi ABS-ASR. Le modèle proposé dans [TC91], calculé à partir d'un système idéalisé composé d'une seule roue, correspond aux équations (3.120)-(3.121).

La commande proposée dans [TC91] est basée sur la théorie des surfaces glissantes : les variables vitesse longitudinale V_x et vitesse de rotation $\dot{\psi}$ sont attirées vers des surfaces qui assurent que $|g| < g_s$, puis sont contraintes de se déplacer le long de ces surfaces. La loi de commande ainsi obtenue n'est bien sûr, contrairement à toutes les lois proposées précédemment, pas continue.

5.2 Commande des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 en présence de glissement

Dans la littérature sur les robots mobiles, les lois de commande prenant explicitement en compte les glissements sont essentiellement des lois de commande partielles, dans le sens qu'elles ne contrôlent qu'une partie de la dynamique du robot. Ainsi, à la section 5.1.2, les lois proposées dans [Ack93], [MT92] ou [MCH91] ne contrôlent que la dynamique latérale du robot. À l'inverse, la loi de commande proposée dans [TC91] contrôle uniquement la dynamique longitudinale. La loi proposée dans [All94] contrôle les 2 dynamiques, cependant seules la vitesse longitudinale est effectivement contrôlée, pas la position. Enfin, la loi proposée dans [Lee92] contrôle la totalité du modèle du robot, mais ce n'est pas une loi de retour d'état.

Notre objectif dans cette section est de construire une loi de retour d'état, qui prenne explicitement en compte les glissements, et qui contrôle cette fois l'ensemble de la dynamique du robot considéré. C'est-à-dire, nous cherchons à construire, pour le modèle d'un robot mobile tenant compte des glissements, les mêmes types de lois que celles construites au Chapitre 4 dans le cas d'un roulement pur sans glissement. Comme nous ne connaissons pas de modèle de glissement lorsque la vitesse du robot est nulle (cf. Chapitre 3), nous ne pouvons cependant pas rechercher de loi de stabilisation. Nous nous concentrons donc sur la poursuite d'une trajectoire ne comportant pas de position d'arrêt. Pour aborder ce problème, nous ne considérons que le cas des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 , c'est-à-dire les robots dont les équations sont les plus simples. Une partie des résultats présentés dans cette section a été obtenue lors de l'encadrement du stage d'E. Sachot. Ils apparaissent donc dans [Sac93].

Cette section est organisée comme suit : à la section 5.2.1, nous présentons le modèle des robots de la classe \mathcal{R}_0^2 rendant compte du phénomène de glissement, qui sera utilisé aux sections 5.2.2 et 5.2.3. Ce modèle a déjà été présenté au Chapitre 3, il s'agit du système (3.100). Cependant, comme nous allons l'utiliser abondamment, nous apportons quelques détails sur la manière dont il a été construit. Les entrées du système (3.100) sont les couples appliqués sur chacune des roues motrices. Par analogie avec les modèles cinématiques définis dans le cas roulement pur sans glissement, il est possible, en considérant cette fois les vitesses de rotation des roues comme les entrées, de simplifier le modèle (3.100). On obtient le système (3.95), qui est appelé également modèle cinématique. La section 5.2.2 est consacrée à la construction d'une loi de poursuite de trajectoire pour ce modèle cinématique. Le même problème est étudié à la section 5.2.3, pour le cas du système complet (3.100), appelé modèle dynamique par analogie avec le cas roulement pur sans glissement.

5.2.1 Modèle d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 rendant compte des glissements

Le robot de la classe \mathcal{R}_0^2 que nous considérons dans cette section est décrit sur la Figure 5.1. Il comporte 2 roues fixes ayant même axe (roues 1 et 2), actionnées chacune par un moteur, plus une roue désaxée non actionnée.

Pour construire le modèle du robot présenté à la Figure 5.1, nous posons tout d'abord l'Hypothèse suivante

Hypothèse 5.1 La dynamique de la roue désaxée peut être négligée

Nous supposons que la roue désaxée n'affecte pas la dynamique du robot décrit sur la Figure 5.1 □

Autant cette hypothèse était parfaitement exacte sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement (relation (2.17)), autant elle est très discutable lorsque le robot peut glisser. En effet, il est clair qu'en fonction de la valeur des variables de glissement et de dérive de la roue désaxée, le mouvement général du robot sera légèrement différent. Cependant, comme il a déjà été dit à la page 122, puisque nous ne considérons que des glissements et des dérives faibles, l'erreur commise en posant l'Hypothèse 5.1 est faible, et compte tenu des simplifications qu'elle apporte au modèle du robot, c'est une hypothèse "rentable"

La définition des variables de glissement et de dérive (Définitions 3.1 et 3.3) faisant apparaître les composantes du vecteur vitesse des roues, dans le plan de celles-ci, et perpendiculairement à ce plan, nous choisissons de repérer le point P , non pas dans le repère immobile $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ comme au Chapitre 2, mais dans le repère $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ (voir Figure 5.1) dont le centre est fixe, mais dont l'orientation suit celle du robot. Un tel repère a été proposé initialement dans [SA90]. Il est particulièrement bien adapté à notre problème, car ainsi les composantes des vecteurs vitesse qui interviennent dans les variables g et δ sont directement les composantes des vecteurs vitesse dans le repère de travail. Nous introduisons alors les notations suivantes (voir Figure 5.1) :

r : rayon des roues,

L : demi-distance entre les roues 1 et 2,

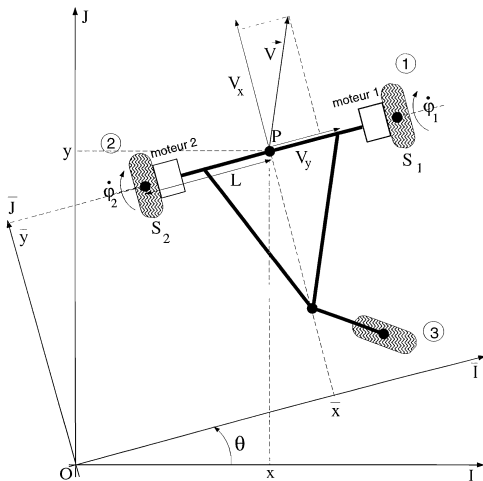
θ : angle entre $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ et $[O, \vec{I}, \vec{J}]$,

ω : dérivée de θ , i.e. vecteur vitesse de rotation instantané du robot,

$(x, y)^T$: coordonnées du point P dans $[O, \vec{I}, \vec{J}]$,

$(v_x, v_y)^T$: vecteur vitesse linéaire au point P , exprimé dans le repère $[O, \vec{I}, \vec{J}]$,

φ_i : angle de rotation de la roue i ,

Figure 5.1: Robot de la classe \mathcal{R}_0^2 étudié dans cette section

$\dot{\varphi}_i$ vitesse de rotation de la roue i ,

C_i couple entraînant la roue i en rotation.

Le vecteur de commande pour ce système est clairement

$$\mathcal{I} = (C_1, C_2)^T$$

et un vecteur de coordonnées généralisées possible est

$$\chi = (\bar{x}, \bar{y}, \theta, \varphi_1, \varphi_2, v_x, v_y, \omega, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)^T$$

Il apparaîtra lors de la construction du modèle que les angles de rotation φ_1 et φ_2 n'interviennent dans les équations d'aucune autre coordonnée généralisée. Comme nous ne sommes pas intéressés par connaître les valeurs prises par ces 2 variables, nous pouvons les éliminer du groupe des coordonnées généralisées. Celles-ci sont donc en définitive

$$\chi = (\bar{x}, \bar{y}, \theta, v_x, v_y, \omega, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)^T$$

En utilisant, la loi de composition des vitesses sur un corps rigide (Théorème 2.1), on montre facilement que les vecteurs vitesses des roues 1 et 2 sont

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_x + L\omega \\ v_y \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_x - L\omega \\ v_y \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Nous en déduisons que les variables de dérive des roues 1 et 2 sont données (en reportant (5.4) dans la Définition 3.3) par

$$\delta_1 = \frac{v_y}{v_x + L\omega} \quad (5.5)$$

$$\delta_2 = \frac{v_y}{v_x - L\omega} \quad (5.6)$$

Pour la définition de la variable de glissement, nous n'adoptons pas la définition générale, i.e. Définition 3.1. Nous souhaitons dans un premier temps (i.e. à la section 5.2.2) considérer les vitesses des roues motrices comme les entrées du système. Or, dans la Définition 3.1, $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ peuvent apparaître au dénominateur. En utilisant la Définition 3.1 nous obtiendrions donc comme modèle, un système non-linéaire non-affine en les entrées. Comme il existe très peu de résultats sur ces systèmes, nous préférons suivre la Remarque 3.6 et prendre comme définition de la variable de glissement, la relation (3.8). En reportant (5.4) dans (3.8), nous obtenons que

$$g_1 = \frac{r\dot{\varphi}_1 - (v_x + L\omega)}{v_x + L\omega} \quad (5.7)$$

$$g_2 = \frac{r\dot{\varphi}_2 - (v_x - L\omega)}{v_x - L\omega} \quad (5.8)$$

$$(5.9)$$

Au vu de (5.7) et (5.8), le modèle décrivant le robot représenté sur la Figure 5.1 sera bien affine en les commandes. Enfin, pour les forces de contact longitudinales et transversales, nous choisissons, comme la plupart des auteurs (voir section 3.2.3) un modèle pseudo-glissement pseudo-dérive, i.e.

$$F_{x,i} = Gg_i, \quad F_{y,i} = D\delta_i$$

Nous supposons en outre que les rigidités de glissement et de dérive sont les mêmes pour les 2 roues. Cette dernière hypothèse est très réaliste dès que le sol est homogène.

Tous ces choix ayant été fait, le modèle du robot décrit sur la Figure 5.1 peut être obtenu aisément à l'aide de la Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD).

Nous calculons tout d'abord l'expression de l'accélération du robot en fonction de \dot{v}_x , \dot{v}_y et $\dot{\omega}$. Les vecteurs \vec{I} et \vec{J} s'expriment en fonction des vecteurs immobiles \vec{i} et \vec{j} comme suit

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{J} &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (5.10)$$

En dérivant les relations (5.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= (-\sin \theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos \theta \dot{\theta} \vec{j}) \omega \\ \frac{d\vec{J}}{dt} &= (-\cos \theta \dot{\theta} \vec{i} - \sin \theta \dot{\theta} \vec{j}) \omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

ou encore, en reportant (5.10) dans (5.11)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= \omega \vec{J} \\ \frac{d\vec{J}}{dt} &= -\omega \vec{I} \end{aligned} \quad (5.12)$$

La dérivée des 2 vecteurs \vec{I} et \vec{J} permet de calculer maintenant l'accélération du robot. Compte tenu de la définition du couple $(\ddot{x}, \ddot{y})^T$ nous avons

$$\vec{OP} = \ddot{x} \vec{I} + \ddot{y} \vec{J} \quad (5.13)$$

En dérivant la relation (5.13) et en y reportant (5.12), nous obtenons tout d'abord que

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = (\ddot{x} - \ddot{y}\omega) \vec{I} + (\ddot{y} + \ddot{x}\omega) \vec{J} \quad (5.14)$$

Or, par définition de $(v_x, v_y)^T$ nous avons

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = v_x \vec{I} + v_y \vec{J} \quad (5.15)$$

Nous déduisons de (5.14) et (5.15), la partie supérieure du modèle recherché

$$\begin{cases} \dot{\ddot{x}} = v_x + \ddot{y}\omega \\ \dot{\ddot{y}} = v_y - \ddot{x}\omega \\ \dot{\dot{\theta}} = \omega \end{cases} \quad (5.16)$$

De manière à pouvoir utiliser la RFD, nous calculons maintenant l'accélération du robot. En dérivant (5.15), et en utilisant encore une fois (5.12), nous obtenons finalement

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OP}}{dt^2} = (\dot{v}_x - v_y \omega) \vec{I} + (\dot{v}_y + v_x \omega) \vec{J} \quad (5.17)$$

Ecrivons maintenant le bilan des forces s'exerçant sur le robot

$$\text{forces selon l'axe } \vec{I} \quad F_{y,1} + F_{y,2} = D(\delta_1 + \delta_2),$$

$$\text{forces selon l'axe } \vec{J} \quad F_{x,1} + F_{x,2} = G(g_1 + g_2),$$

$$\text{moments selon un axe vertical passant par } P \quad L(F_{x,2} - F_{x,1}) = LG(g_2 - g_1)$$

En reportant ces forces et ces moments, ainsi que (5.17) dans la RFD, nous obtenons une seconde partie du modèle du robot

$$\begin{cases} \dot{v}_x = v_y \omega + \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ \dot{v}_y = -v_x \omega + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \\ \dot{\omega} = \frac{LG}{I_x}(g_2 - g_1) \end{cases} \quad (5.18)$$

avec

M masse du robot (y compris les roues),

I_x moment d'inertie du robot selon l'axe vertical passant par P

Pour obtenir enfin la dernière partie du modèle, il suffit d'écrire la RFD au système formé par la roue i prise isolément. En effet, selon l'axe horizontal de la roue i , le bilan des moments est

$$C_i - rF_{x,i} = C_i - rGg_i \quad (5.19)$$

Au vu de (5.19), la RFD s'écrit

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{1}{I_i}(C_i - rGg_i) \quad (5.20)$$

avec

I_i moment d'inertie de la roue i par rapport à son axe horizontal.

La relation (5.20) constitue la dernière partie du modèle. En effet, en regroupant (5.16), (5.18) et (5.20), nous obtenons bien le système (3.100), c'est-à-dire, avec nos nouvelles notations

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x + \tilde{y}\omega \\ \dot{y} = v_y - \tilde{x}\omega \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v}_x = v_y \omega + \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ \dot{v}_y = -v_x \omega + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \\ \dot{\omega} = \frac{LG}{I_x}(g_2 - g_1) \\ \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{I_1}(C_1 - rGg_1) \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{I_2}(C_2 - rGg_2) \end{cases} \quad (5.21)$$

Les commandes du système, i.e. $(C_1, C_2)^T$ n'apparaissent que dans les 2 dernières lignes du modèle, où elles ne sont multipliées que par un terme constant différent de zéro. Ce système présente donc une structure cascade (voir par exemple [PAC91]). Il est donc possible de n'étudier dans un premier temps que les 6 premières lignes de (5.21) dans lesquelles les entrées seraient les vitesses de rotation des 2 roues $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ (qui interviennent dans ces équations via les fonctions g_i , cf. relations (5.7) et (5.8)). On retrouve bien le système (3.95). Par analogie avec les dénominations utilisées dans le cas où les hypothèses de roulement pur sans glissement sont satisfaites, ce modèle réduit sera dit modèle cinématique, alors que le modèle complet (5.21) sera dit modèle dynamique. Au vu de (5.7) et (5.8), il est possible de considérer comme entrées du modèle cinématique, les variables de glissement g_1 et g_2 , plutôt que $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$. A partir de là, on peut encore plus simplement considérer comme entrées, les variables w_1 et w_2 définies par

$$\begin{cases} w_1 = \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ w_2 = \frac{L_G}{L_x}(g_1 - g_2) \end{cases} \quad (5.22)$$

Le modèle cinématique du robot décrit sur la Figure 5.1 s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x + y\omega \\ \dot{y} = v_y - \bar{x}\omega \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v}_x = \zeta_1 + w_1 \\ \dot{v}_y = \zeta_2 \\ \dot{\omega} = w_2 \end{cases} \quad (5.23)$$

avec

$$\begin{cases} \zeta_1 = v_y\omega \\ \zeta_2 = -v_x\omega + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \end{cases}$$

5.2.2 Commande du modèle cinématique d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2

Dans cette section, nous proposons une loi de poursuite de trajectoire pour le modèle cinématique (5.23). Nous utilisons la même approche que celle présentée au Chapitre 4 dans le cas où le robot roule sans glisser, c'est-à-dire une approche par linéarisation exacte. A la section 5.2.2.a, nous proposons une loi de poursuite pour le cas idéal où les rigidités de glissement G et de dérive D sont connues. Cette loi est complétée à la section 5.2.2.b par un schéma adaptatif, pour pouvoir être utilisée dans le cas réel où G et D ne sont bien sûr pas connues.

5.2.2.a Poursuite de trajectoire par linéarisation statique

En utilisant le Théorème classique de Jakubczyk-Respondek, Théorème B.9, on montre que le système (5.23) n'est pas complètement linéarisable par retour d'état statique. Nous avons alors cherché à linéariser complètement ce système à l'aide d'une loi de bouclage

dynamique, comme cela avait été fait à la section 4.1, mais nous n'avons pas trouvé de fonctions de sorties permettant cette linéarisation complète. Par conséquent, nous nous sommes tournés finalement vers une loi de linéarisation statique partielle.

Les fonctions de sortie sont exactement les mêmes que dans le cas d'un roulement pur sans glissement, ce sont les coordonnées cartésiennes d'un point situé sur la perpendiculaire à l'essieu moteur en P . Les coordonnées (s_1, s_2) de ce point dans $[O, \vec{I}, \vec{J}]$ sont données par

$$\begin{cases} s_1 = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta + e \cos \theta \\ s_2 = x \sin \theta + \bar{y} \cos \theta + e \sin \theta \end{cases} \quad (5.24)$$

avec e , la distance entre le point P et le point de coordonnées (s_1, s_2) . La dérivée de (s_1, s_2) ne fait apparaître aucune commande

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = v_x \cos \theta - v_y \sin \theta - e \sin \theta \omega \\ \dot{s}_2 = v_x \sin \theta + v_y \cos \theta + e \cos \theta \omega \end{cases} \quad (5.25)$$

On peut par conséquent dériver une seconde fois

$$\begin{cases} \ddot{s}_1 = \zeta_3 + w_1 \cos \theta - e w_2 \sin \theta \\ \ddot{s}_2 = \zeta_4 + w_1 \sin \theta + e w_2 \cos \theta \end{cases} \quad (5.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= \zeta_1 \cos \theta - \omega \sin \theta v_x - \zeta_2 \sin \theta - \omega \cos \theta v_y - e \omega^2 \cos \theta \\ &= \sin \theta \frac{D}{M} \left[\frac{v_y}{v_x + L\omega} + \frac{v_y}{v_x - L\omega} \right] - e \omega^2 \cos \theta \\ \zeta_4 &= \zeta_1 \sin \theta + \omega \cos \theta v_x + \zeta_2 \cos \theta - \omega \sin \theta v_y - e \omega^2 \sin \theta \\ &= -\cos \theta \frac{D}{M} \left[\frac{v_y}{v_x + L\omega} + \frac{v_y}{v_x - L\omega} \right] - e \omega^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Au vu de (5.26), la matrice de découplage est

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -e \sin \theta \\ \sin \theta & e \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Cette matrice présente un déterminant non nul, à la condition que $e \neq 0$. Sous cette réserve, le couple de fonctions de sortie (s_1, s_2) permet donc bien de linéariser partiellement le système (5.23). La loi linéarisante s'écrit

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} -\zeta_3 + u_1 \\ -\zeta_4 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \omega^2 \\ \frac{D}{eM} (\delta_1 + \delta_2) \end{pmatrix} + \Delta^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

avec (u_1, u_2) un couple de commande auxiliaire. Elle conduit au système linéaire

$$\begin{cases} \ddot{s}_1 = u_1 \\ \ddot{s}_2 = u_2 \end{cases}$$

Avec un choix adéquat de u_1 et u_2 , on obtient la convergence exponentielle de s_1 et s_2 vers la trajectoire de référence.

Pour pouvoir utiliser en pratique cette loi, il faudrait prouver que la dynamique des variables non linéarisées est stable. Nous ne sommes malheureusement pas parvenus à le

prouver de manière théorique. Seules les simulations (page 248 à 5.19) montrent que cela semble effectivement être le cas.

Un second obstacle à l'utilisation de cette loi, est qu'elle requiert la connaissance explicite des rigidités G et D , ce qui n'est jamais le cas en pratique. Pour évaluer la robustesse de la loi (5.28), nous présentons le raisonnement suivant soient (G_r, D_r) et (G_e, D_e) respectivement les rigidités réelles et estimées. La loi de commande (5.28) s'exprime donc comme

$$w = \begin{pmatrix} e\omega^2 \\ \frac{D_r}{eM}(\delta_1 + \delta_2) \end{pmatrix} + \Delta^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

On tire également de (5.22) que

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{G_r} w_1 + \frac{J}{LG_e} w_2 \right) \\ g_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{G_e} w_1 - \frac{J}{LG_e} w_2 \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

En reportant (5.29) et (5.30) dans (5.23), on montre que

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= v_y \omega + \frac{G_r}{G_e} w_1 \\ &= v_y \omega + \frac{G_r}{G_e} (e\omega^2 + \cos \theta u_1 + \sin \theta u_2) \\ \dot{\omega} &= \frac{G_r}{G_e} w_2 \\ &= \frac{G_r}{G_e} \left(\frac{D_r}{eM} (\delta_1 + \delta_2) - \frac{1}{e} \sin \theta u_1 + \frac{1}{e} \cos \theta u_2 \right) \end{aligned}$$

Il est impossible de conclure de manière théorique à la robustesse ou à la non-robustesse de cette loi, cependant, le fait que les erreurs d'estimations apparaissent dans les équations via le quotient $\frac{G_r}{G_e}$ est très encourageant. En effet, ce quotient reste toujours positif, et est voisin de 1. Il ne doit donc pas perturber les équations du système bouclé.

De manière à pouvoir conclure de façon théorique, plaçons nous dans un cas très particulier la trajectoire à suivre est la droite $y = 0$, et le robot se trouve initialement sur cette droite, parfaitement orienté pour suivre celle-ci (i.e. $\theta = 0$). On montre aisément que θ et ω restent égaux à zéro, et que $\dot{x} = x$ vérifie

$$\ddot{x} = \frac{G_r}{G_e} u_1$$

Si $u_1 = -k_1 \tilde{s}_1 - k_2 \dot{\tilde{s}}_1 + \ddot{s}_{1,ref}$, et compte tenu que $x = s_1 - e$, on obtient finalement

$$\ddot{\tilde{s}}_1 = \frac{G_r}{G_e} (-k_1 \tilde{s}_1 - k_2 \dot{\tilde{s}}_1)$$

Cette équation reste stable, quelle que soit l'erreur d'estimation. La loi (5.28) est donc, dans ce cas particulier très robuste.

Simulations

Dans les simulations présentées ci-dessous, les paramètres inertiels et géométriques du robot unicycle ont été choisis égaux à

$$\begin{aligned} M &= 1000 \text{ Kg} \\ I_z &= 500 \text{ Kg.m}^2 \\ I_1 &= 1.6 \text{ Kg.m}^2 \\ L &= 1 \text{ m} \\ r &= 0.35 \text{ m} \end{aligned}$$

Les conditions de contact roues-sol ont été prises égales à

$$\begin{aligned} G &= 10^5 \text{ N} \\ D &= 4.10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

La trajectoire de référence est l'axe I , parcouru à une vitesse de 5 m.s^{-1} enchaîné avec un cercle de rayon 5 m parcouru lui aussi à une vitesse de 5 m.s^{-1} soit une accélération normale d'un demi-jet (voir Figure 5.2). La position du point commandé est donnée par

$$l = 2 \text{ m}$$

La dynamique de la poursuite de trajectoire est caractérisée par

$$k_1 = k_3 = 1 \quad k_2 = k_4 = 0.25$$

Enfin les conditions initiales ont été choisies égales à

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les Figures 5.2 à 5.9 présentent le cas d'une poursuite idéale, c'est-à-dire lorsque les rigidités G et D sont connues.

On constate, Figures 5.2 et 5.3, que l'erreur initiale est rattrapée selon la dynamique spécifiée par les k_i . Il n'y a en particulier aucun heurt lors du passage de la poursuite de droite à celle d'un cercle.

Les Figures 5.4 à 5.6 attestent que l'ensemble du vecteur d'état reste borné, même les variables non-linéarisées dont nous n'avons pas su prouver la bornitude.

La Figure 5.7 montre que les commandes engendrées sont acceptables.

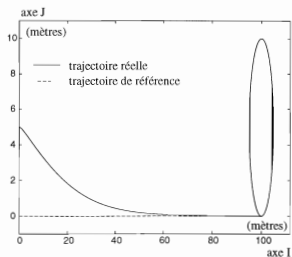
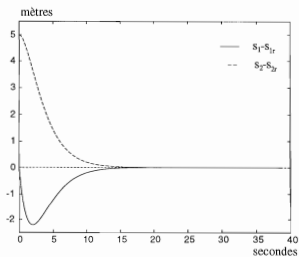
Enfin, les Figures 5.8 et 5.9 montrent que nous n'avons pas quitté la zone de pseudo-glissement et pseudo-dérive, comme attendu.

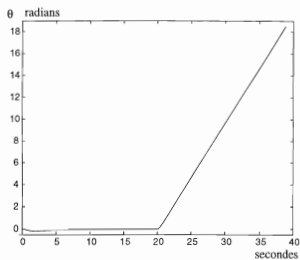
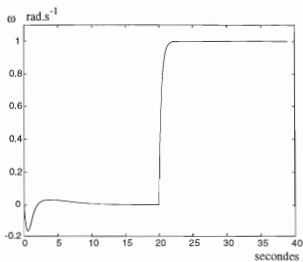
Les Figures 5.10 à 5.19 illustrent le comportement du robot lorsque G et D sont mal connus. Plus précisément, pour la simulation présentée sur les Figures 5.10 à 5.14 G et D ont été sous-estimés ($\hat{G} = 75000N$, $\hat{D} = 30000N$), alors que pour la simulation présentée sur les Figures 5.15 à 5.19 ils sont sur-estimés ($\hat{G} = 150000N$, $\hat{D} = 60000N$).

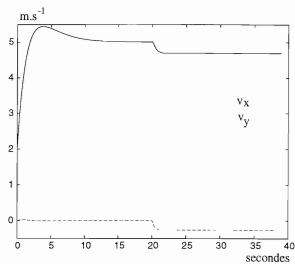
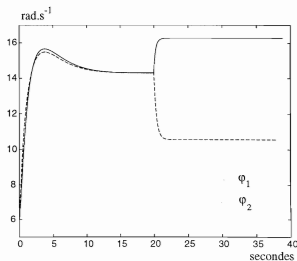
On constate, Figures 5.10, 5.11, 5.15 et 5.16 que dans les 2 cas, le robot reste à distance finie de la trajectoire de référence. Pour ce qui est de la poursuite de droite, nous avons même convergence. Pour la poursuite de cercle, lorsque les rigidités sont sous-estimées, le robot se stabilise sur un cercle de plus grand diamètre, et inversement, si les rigidités sont sur-estimées, il se stabilise sur un cercle de rayon plus petit.

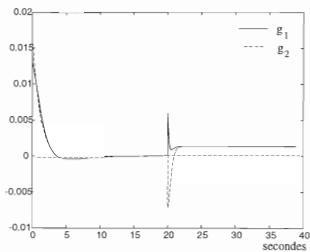
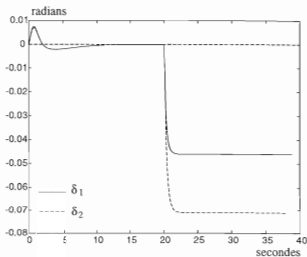
Les Figures 5.12 et 5.17 montrent que l'amplitude des commandes reste acceptable.

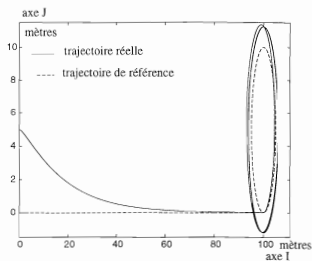
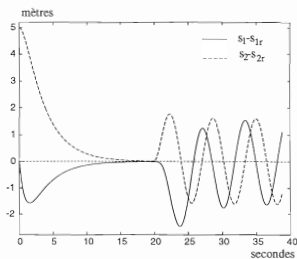
Enfin, les Figures 5.13, 5.14, 5.18 et 5.19 attestent que nous n'avons pas quitté la zone de pseudo-glissement, pseudo-dérive.

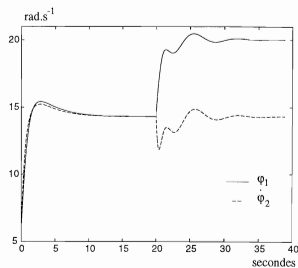
Figure 5.2: G et D connus trajectoire cartésienneFigure 5.3: G et D connus évolution de l'erreur en fonction du temps

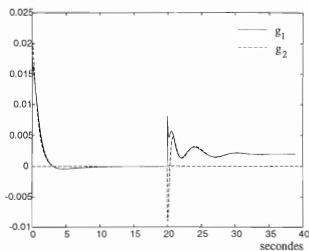
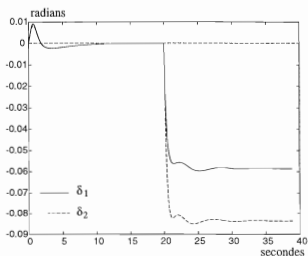
Figure 5.4: G et D connus évolution de la variable d'état θ Figure 5.5: G et D connus évolution de la variable d'état ω

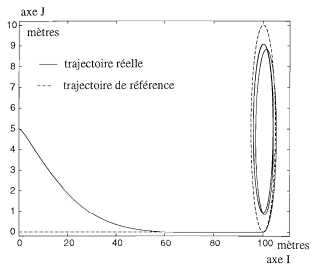
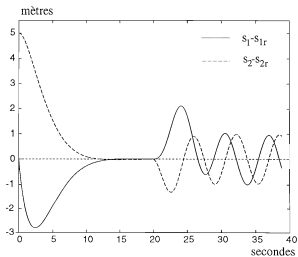
Figure 5.6: G et D connus évolution des variables d'état v_x et v_y Figure 5.7: G et D connus évolution des commandes

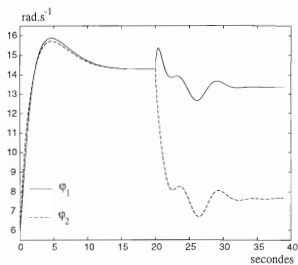
Figure 5.8: G et D connus évolution des variables de glissementFigure 5.9: G et D connus évolution des variables de dérive

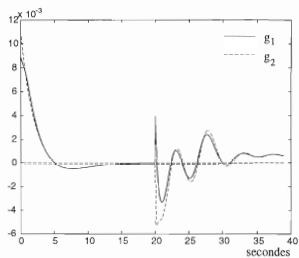
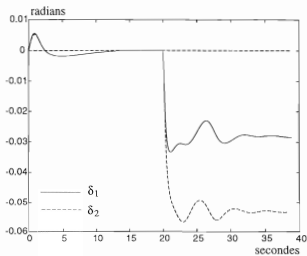
Figure 5.10: G et D sous-estimées trajectoire cartésienneFigure 5.11. G et D sous-estimées évolution de l'erreur en fonction du temps

Figure 5.12: G et D sous-estimées · évolution des commandes

Figure 5.13: G et D sous-estimées évolution des variables de glissementFigure 5.14: G et D sous-estimées évolution des variables de dérive

Figure 5.15: G et D sur-estimées trajectoire cartésienneFigure 5.16: G et D sur-estimées évolution de l'erreur en fonction du temps

Figure 5.17: G et D sur-estimées évolution des commandes

Figure 5.18: G et D sur-estimées évolution des variables de glissementFigure 5.19: G et D sur-estimées évolution des variables de dérive

5.2.2.b Schéma adaptatif

La loi de linéarisation statique (5.28) est naturellement robuste, ce qui est déjà un résultat très intéressant. Cependant, dans le cadre d'une application pratique, l'on souhaite faire converger le robot vers sa trajectoire de référence, même en présence d'une erreur d'estimation. Nous proposons maintenant un schéma de commande adaptatif qui permet de répondre à cette attente.

Le principe du schéma adaptatif, inspiré de [PBPJ91], est le suivant : soit un système non-linéaire affine en les paramètres inconnus

$$\dot{x} = A(x, u)p + a(x, u)$$

avec p le vecteur des paramètres inconnus ($p = (G, D)^T$ dans notre cas). L'idée centrale est d'utiliser l'erreur d'équation pour estimer p , c'est-à-dire un vecteur d'état \hat{p} , estimé de p , vérifiant l'équation différentielle

$$\dot{\hat{p}} = -K(A(x, u)\hat{p} + a(x, u) - \dot{x}) \quad (5.31)$$

avec K une matrice à spécifier par l'utilisateur. L'algorithme (5.31) ne peut toutefois pas être utilisé tel quel, car il fait appel à la dérivée de l'état, qui dans un retour d'état n'est pas supposée connue. Ce problème peut être contourné en introduisant un filtre, c'est-à-dire :

$$\dot{\hat{x}} + Bf = A(x, u)\hat{p} + a(x, u) - \dot{x}$$

avec B une matrice à spécifier par l'utilisateur. Si B est diagonale avec des valeurs propres à partie réelle suffisamment négative, alors f converge très vite vers l'erreur d'équation. Afin d'utiliser les notations proposées dans [PBPJ91], nous introduisons l'observateur \hat{x} défini par

$$f = \hat{x} - x$$

L'algorithme adaptatif d'estimation de p peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(x, u)\hat{p} + a(x, u) - B(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{p}} &= -K(\hat{x} - x) \end{cases} \quad (5.32)$$

Si l'on ne souhaite pas observer l'état tout entier, on peut introduire dans (5.32) une fonction d'observation $h(x)$. L'algorithme (5.32) s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \dot{\hat{h}} &= \frac{\partial h}{\partial x} A(x, u)\hat{p} + \frac{\partial h}{\partial x} a(x, u) - B(\hat{h} - h) \\ \dot{\hat{p}} &= -K(\hat{h} - h) \end{cases} \quad (5.33)$$

Dans notre cas, les paramètres incertains n'influent que sur les accélérations, on peut donc choisir comme fonction d'observation

$$h(x) = (v_x, v_y, \omega)^T \quad (5.34)$$

En reportant (5.34) dans (5.33), on obtient pour notre application particulière

$$\begin{cases} \dot{\hat{h}} = \begin{pmatrix} v_y \omega \\ -v_x \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{G_s}{M} (g_1 + g_2) \\ -\frac{D_s}{M} (\delta_1 + \delta_2) \\ \frac{G_s L}{I_x} (g_1 - g_2) \end{pmatrix} \\ \dot{\hat{p}} = -K(\hat{h} - h) \end{cases} \quad (5.35)$$

Nous avons ajusté les différents gains empiriquement, au vu des différentes simulations que nous avons réalisées. Nous avons recherché une convergence rapide, mais pas trop brutale, de façon que l'estimateur n'oscille pas (cela risque d'engendrer des commandes de très grande amplitude). Nous avons choisi (en nous inspirant de [PBPJ91]) :

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{M}(g_1 + g_2) & 0 & \frac{L}{I_x}(g_1 - g_2) \\ 0 & \frac{1}{M}(\delta_1 + \delta_2) & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$k_1 = 2600000000 \quad k_2 = 30000000$$

L'étude de la stabilité de ce schéma adaptatif est donnée dans [PBPJ91]. Elle permet de prouver facilement que la loi de linéarisation partielle proposée à section 5.2.2.a où G et D ont été remplacés respectivement par \hat{G} et \hat{D} , avec l'algorithme d'adaptation proposé dans (5.32), assure la convergence de s_1 et s_2 vers $s_{1,ref}(t)$ et $s_{2,ref}(t)$. La convergence est assurée à la condition que l'erreur initiale d'estimation $\hat{p} - p$ ne soit pas trop importante (sinon, il faut remplacer la matrice K par une fonction projection plus complexe).

Simulations

Les Figures 5.20 à 5.33 présentent le comportement du robot lorsqu'il est commandé par la loi de linéarisation adaptative. Les Figures 5.20 à 5.26 correspondent plus précisément à une simulation où G et D sont initialement sous-estimées ($G_0 = 75000N$ et $D_0 = 30000N$), tandis que les Figures 5.27 à 5.33 correspondent à une simulation où G et D sont initialement sur-estimées ($G_0 = 150000N$ et $D_0 = 60000N$).

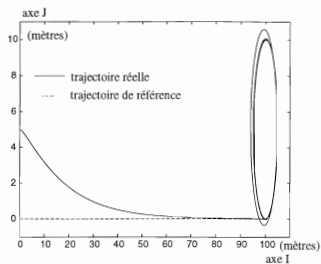
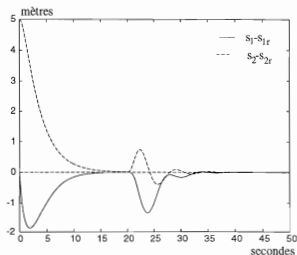
On constate dans les 2 cas, Figures 5.20, 5.21, 5.27 et 5.28, que cette fois-ci le robot converge vers la trajectoire désirée.

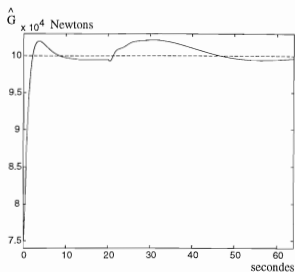
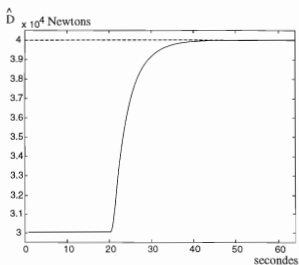
On constate de plus, Figures 5.22, 5.23, 5.29 et 5.30, que les paramètres estimés convergent vers leur valeur réelle, ce qui n'était pas garanti a priori par l'analyse théorique présentée dans [PBPJ91].

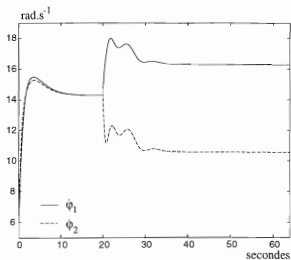
On constate aussi que \hat{G} converge presque parfaitement pendant la poursuite de la droite, puis est affiné lors de la poursuite du cercle. A l'inverse, \hat{D} ne commence à converger que lors de la poursuite du cercle. La poursuite d'une droite n'est pas discriminante pour estimer ce paramètre.

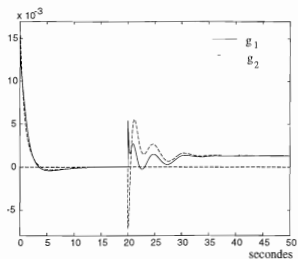
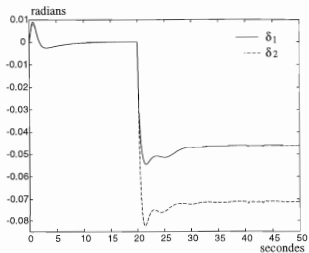
Les Figures 5.24 et 5.31 montrent que l'amplitude des commandes reste toujours acceptable.

Enfin, les Figures 5.25, 5.26, 5.32 et 5.33 attestent que l'on ne quitte pas la zone de pseudo-glissement et pseudo-dérive.

Figure 5.20: G et D initialement sous-estimées trajectoire cartésienneFigure 5.21: G et D initialement sous-estimées évolution de l'erreur

Figure 5.22: G et D initialement sous-estimées évolution de \hat{G} Figure 5.23: G et D initialement sous-estimées évolution de \hat{D}

Figure 5.24: G et D initialement sous-estimées : évolution des commandes

Figure 5.25: G et D initialement sous-estimées évolution des variables de glissementFigure 5.26: G et D initialement sous-estimées évolution des variables de dérive

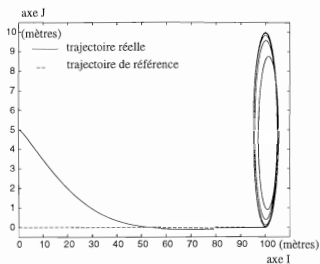


Figure 5.27: G et D initialement sur-estimées trajectoire cartésienne

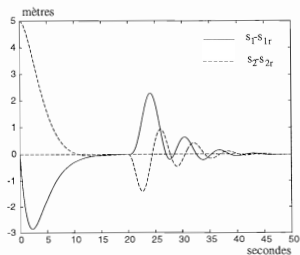
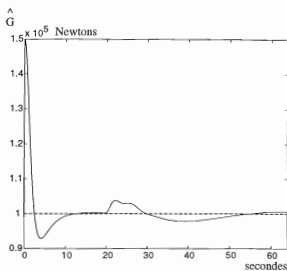
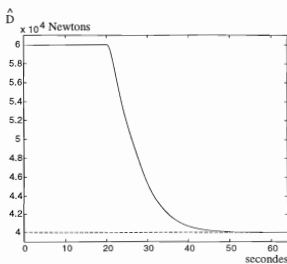
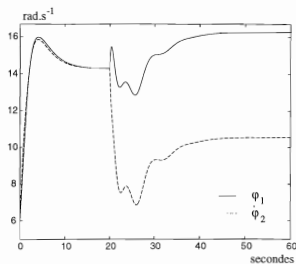


Figure 5.28: G et D initialement sur-estimées évolution de l'erreur

Figure 5.29: G et D initialement sur-estimées évolution de \hat{G} Figure 5.30: G et D initialement sur-estimées évolution de \hat{D}

Figure 5.31: G et D initialement sur-estimées évolution des commandes

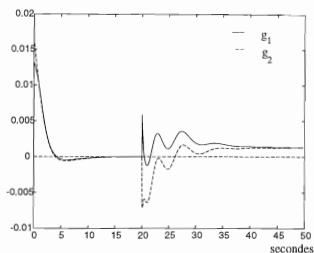


Figure 5.32: G et D initialement sur-estimées : évolution des variables de glissement

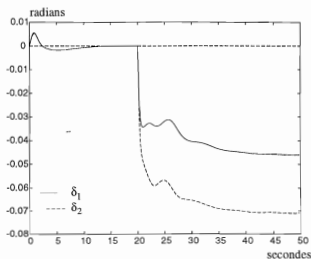


Figure 5.33: G et D initialement sur-estimées : évolution des variables de dérive

5.2.3 Commande du modèle dynamique d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2

La loi de linéarisation statique, complétée par le schéma adaptatif, permet de faire suivre au robot décrit sur la Figure 5.1 n'importe quelle trajectoire de référence ne comportant pas de point d'arrêt, même si les conditions de contact roues-sol sont imparfaitement connues. Le modèle dynamique (5.21) se déduisant du modèle cinématique (5.23) par une structure cascade, la loi de linéarisation statique peut être étendue à ce système très facilement, de même le schéma adaptatif. Nous nous heurtons cependant à un très gros problème de robustesse. Celui-ci provient du fait que les 2 équations supplémentaires dans (5.21) ne sont pas des intégrateurs purs, mais font apparaître le paramètre inconnu G . Nous étendons tout d'abord la loi de linéarisation statique au cas du modèle dynamique, section 5.2.3.a, puis nous étudions le nouveau problème de robustesse, section 5.2.3.b.

5.2.3.a Poursuite de trajectoire par linéarisation statique

La loi de poursuite de trajectoire proposée à la section 5.2.2.a pour le modèle cinématique (5.23) s'étend sans difficulté au cas du modèle dynamique (5.21).

Le modèle dynamique (5.21) peut être ré-écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x + \tilde{y}\omega \\ \dot{\tilde{y}} = v_y - \tilde{x}\omega \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v}_x = \zeta_1 \\ \dot{v}_y = \zeta_2 \\ \dot{\omega} = \zeta_3 \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{I} (C_1 - rGg_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{I} (C_2 - rGg_2) \end{cases} \quad (5.36)$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= v_y\omega + \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \\ \zeta_2 &= -v_x\omega - \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \\ \zeta_3 &= \frac{LG}{I_r}(g_1 - g_2) \end{aligned}$$

La dérivée seconde des fonctions de sortie s_1 et s_2 (relation (5.26)) ne fait apparaître aucune commande du modèle dynamique. Ces 2 fonctions peuvent par conséquent être dérivées une fois supplémentaire. Les dérivées secondes (relation (5.26)) s'écrivent

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \cos \theta + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \sin \theta - e\omega^3 \cos \theta - e \frac{LG}{I_r}(g_1 - g_2) \sin \theta \\ \ddot{s}_2 &= \frac{G}{M}(g_1 + g_2) \sin \theta - \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2) \cos \theta - e\omega^3 \sin \theta + e \frac{LG}{I_r}(g_1 - g_2) \cos \theta \end{aligned} \quad (5.37)$$

Leur dérivée conduit à

$$\begin{aligned} s_1^{(3)} &= -\frac{G}{M}(g_1 + g_2)\omega \sin \theta + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2)\omega \cos \theta + e\omega^3 \sin \theta - 3e \frac{LG}{I_r}(g_1 - g_2)\omega \cos \theta \\ &\quad + \frac{G}{M}(\dot{g}_1 + \dot{g}_2) \cos \theta + \frac{D}{M}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \sin \theta - e \frac{L\dot{G}}{I_r}(g_1 - g_2) \sin \theta \\ s_2^{(3)} &= \frac{G}{M}(g_1 + g_2)\omega \cos \theta + \frac{D}{M}(\delta_1 + \delta_2)\omega \sin \theta - e\omega^3 \cos \theta - 3e \frac{LG}{I_r}(g_1 - g_2)\omega \sin \theta \\ &\quad + \frac{G}{M}(\dot{g}_1 + \dot{g}_2) \sin \theta - \frac{D}{M}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \cos \theta + e \frac{L\dot{G}}{I_r}(g_1 - g_2) \cos \theta \end{aligned} \quad (5.38)$$

avec

$$\begin{aligned}\dot{g}_1 &= \frac{\frac{1}{2}(C_1 - rGg_1) - (\dot{\zeta}_1 + L\dot{\zeta}_2)}{v_x + L\omega} - \frac{(\dot{\zeta}_1 + L\dot{\zeta}_2)(r\dot{\varphi}_1 - (v_x + L\omega))}{(v_x + L\omega)^2} \\ \dot{g}_2 &= \frac{\frac{1}{2}(C_2 - rGg_2) - (\dot{\zeta}_1 - L\dot{\zeta}_2)}{v_x - L\omega} - \frac{(\dot{\zeta}_1 - L\dot{\zeta}_2)(r\dot{\varphi}_2 - (v_x - L\omega))}{(v_x - L\omega)^2} \\ \dot{\delta}_1 &= \frac{\dot{\zeta}_2}{v_x + L\omega} - \frac{v_y(\dot{\zeta}_1 - L\dot{\zeta}_2)}{(v_x + L\omega)^2} \\ \dot{\delta}_2 &= \frac{\dot{\zeta}_2}{v_x - L\omega} - \frac{v_y(\dot{\zeta}_1 + L\dot{\zeta}_2)}{(v_x - L\omega)^2}\end{aligned}$$

En séparant les commandes du reste des états, on aboutit à

$$\begin{pmatrix} s_1^{(3)} \\ s_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

avec

$$\Delta = \frac{r}{I} G \begin{bmatrix} \frac{1}{v_x + L\omega} \left(\frac{\cos \theta}{M} - \frac{eL}{I_x} \sin \theta \right) & \frac{1}{v_x - L\omega} \left(\frac{\cos \theta}{M} + \frac{eL}{I_x} \sin \theta \right) \\ \frac{1}{v_x + L\omega} \left(\frac{\sin \theta}{M} + \frac{eL}{I_x} \cos \theta \right) & \frac{1}{v_x - L\omega} \left(\frac{\sin \theta}{M} - \frac{eL}{I_x} \cos \theta \right) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Le déterminant de cette matrice est donné par

$$\det \Delta = -\frac{1}{v_x^2 - L^2\omega^2} \frac{2Le}{MI_x} \left(\frac{rG}{I} \right)^2$$

($v_x^2 - L^2\omega^2$ n'est pas nul, puisque l'on suppose que la vitesse d'avancement des 2 roues, i.e. $v_x \pm L\omega$, n'est jamais nulle). Ce déterminant est non nul à la condition que $e \neq 0$. On peut donc bien linéariser partiellement le système (5.36) grâce à ce jeu de fonctions de sortie. La loi linéarisante s'écrit :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} -f_1 + u_1 \\ -f_2 + u_2 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

avec $(u_1, u_2)^T$ le vecteur de commande auxiliaire.

Les simulations prouvent que dans le cas où G et D sont connus, cette loi donne toute satisfaction. Par contre, elle n'est absolument pas robuste

dans le cas où l'on sous-estime G (i.e. on suppose le sol mouillé alors qu'il est sec), la loi diverge dès que l'erreur dépasse 5%.

dans le cas où l'on sur-estime G (i.e. on suppose que l'on est sur sol sec, alors que le sol est mouillé), la loi diverge immédiatement.

Ces divergences sont tellement rapides, qu'il est impossible d'utiliser le schéma adaptatif, il n'a pas le temps de commencer à estimer les paramètres avant que le système "n'explose"

5.2.3.b Analyse du problème de robustesse

Pour essayer d'appréhender ce problème de robustesse, nous considérons de nouveau le cas très simple où la trajectoire de référence est la ligne droite $x = 0$ et où initialement le robot appartient à cette droite et présente le bon angle (i.e. $\theta = 0$) pour la suivre. Dans ce cas, les couples C_1 et C_2 sont égaux à chaque instant, et le système peut être décrit uniquement avec les 3 variables \bar{x} , v_x et $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$.

Le calcul de la dérivée troisième de s_1 donne

$$s_1^{(3)} = 2 \underbrace{\frac{Gr}{MI}}_{\Delta} C + 2 \underbrace{\frac{G}{Mv_x} \left(-\frac{r^2}{I} Gg - 2 \frac{G}{M} g(1+g) \right)}_{f_1} \quad (5.42)$$

En reportant (5.41) dans (5.42) conduit à

$$s_1^{(3)} = f_{1,x} - \frac{G_r}{G_e} f_{1,e} + \frac{G_r}{G_e} u_1 \quad (5.43)$$

ou encore, en utilisant (5.42), et $\Delta G = G_r - G_e$

$$s_1^{(3)} = -2 \frac{G_r \Delta G}{Mv_x} \left(\frac{r^2}{I} + \frac{2(1+g)}{M} \right) g + \frac{G_r}{G_e} u_1 \quad (5.44)$$

Dans notre cas, nous avons aussi

$$2g = \frac{M}{G_r} \ddot{s}_1$$

Particularisons encore, notre problème. Nous supposons que

$$v_x \approx \text{cste},$$

$$1 + g \approx 1.$$

En reportant tous ces éléments dans (5.44), ainsi qu'en explicitant u_1 comme une loi de placement de pôles, nous obtenons finalement

$$\ddot{s}_1^{(3)} + \left(k_1 \frac{G_r}{G_e} + \frac{\Delta G}{v_x} \left(\frac{r^2}{I} + \frac{2}{M} \right) \right) \ddot{s} + k_2 \frac{G_r}{G_e} \dot{s} + k_3 \frac{G_r}{G_e} s = 0 \quad (5.45)$$

L'origine du problème de robustesse apparaît maintenant clairement. Les erreurs d'estimation du type $\frac{G_r}{G_e}$ ne posent toujours pas de difficulté. Par contre, le terme ΔG , compte tenu de la valeur nominale de G qui est de l'ordre de 10^5 , change complètement les pôles, et peut les rendre instables même pour des erreurs d'estimation faibles.

Nous n'avons pas de solution théorique pour traiter ce problème de robustesse. Nous constatons juste en simulation qu'une approche grands gains, c'est-à-dire une commande du type

$$\begin{cases} C_1 = -k(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_{1,ref}) \\ C_2 = -k(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_{2,ref}) \end{cases} \quad (5.46)$$

avec $\dot{\varphi}_{i,ref}$ la commande cinématique proposée à la section 5.2.2 et k un scalaire positif, parvient à faire converger s_1 et s_2 vers leur valeur de référence. Nous avons constaté en simulation qu'un bon compromis entre une bonne robustesse et des commandes d'amplitude raisonnable, est $k = 2500$.

Chapitre 6

Conclusion

Notre objectif dans ce mémoire était de proposer des lois de commande permettant à des robots mobiles à roues de se déplacer de façon autonome, à partir d'une localisation fournie en temps réel par des capteurs embarqués, supposés parfaits.

Nous avons considéré successivement 2 situations

les roues roulent sans glisser sur le sol. Cette hypothèse est réaliste pour des robots se déplaçant à faible vitesse, sur des terrains plans et présentant une bonne adhérence. Elle est donc plutôt dédiée à des robots se déplaçant à l'intérieur de bâtiments industriels.

les roues glissent sur le sol. Cette seconde hypothèse permet d'aborder l'étude des robots évoluant en extérieur

Pour la première situation, c'est-à-dire le cas roulement pur sans glissement, nous avons obtenu les résultats suivants

Nous avons contribué à prouver que, dans l'optique de la synthèse de lois de commande, l'ensemble des robots mobiles à roues constituent *5 classes d'équivalence*.

Pour l'une de ces classes, celle correspondant aux robots équipés uniquement de roues omnidirectionnelles ou de roues folles, le modèle représentatif est complètement linéarisable. Ces systèmes peuvent donc être commandés à l'aide des mêmes techniques que celles employées pour commander un robot manipulateur complètement actionné.

Pour les 4 autres classes, le modèle représentatif est maximalelement non-holonyme. Il faut donc, obstruction de Brockett, distinguer le problème de la poursuite d'une trajectoire mobile, de celui de la stabilisation sur une configuration de repos.

De nombreuses techniques ont été proposées pour aborder chacun de ces problèmes. *L'originalité de notre travail* réside dans le fait que nous sommes intéressés plus particulièrement à la classe des robots équipés de plusieurs roues directrices. Pour

ces systèmes, certaines orientations des roues directrices sont singulières (car elles conduisent à une saturation des actionneurs). *La commande doit donc être calculée de telle façon que l'évitement des singularités soit garanti.* Nous avons utilisé 2 techniques usuelles en commande des systèmes non-holonomes : linéarisation exacte par bouclage d'état dynamique pour la poursuite d'une trajectoire mobile, bouclage d'état instationnaire pour la stabilisation sur une configuration de repos, et nous les avons conçus de manière à satisfaire cette exigence. Les résultats ainsi obtenus pourraient très certainement être exploités pour d'autres systèmes présentant des singularités.

Nous avons également proposé un schéma de commande hybride permettant de *faire le lien entre une loi de poursuite et une loi de stabilisation.* En effet, la tâche la plus usuelle demandée à un robot mobile est de joindre 2 configurations de repos via une trajectoire pré-définie. Il faut donc dans la pratique commuter d'une loi vers l'autre.

Nous avons enfin considéré le problème théorique suivant : *augmenter la vitesse de convergence des lois de bouclage de l'état et du temps.*

Pour la seconde situation, c'est-à-dire le cas du glissement, nous avons effectué le travail suivant

Nous avons effectué une *étude bibliographique* pour proposer un modèle de robot mobile rendant compte des glissements. Nous avons exploité essentiellement la description du contact d'un pneumatique avec le sol.

Nous avons ensuite abordé le problème de la commande de tels systèmes. *La principale difficulté tient au fait que les conditions d'adhérence ne sont pas connues.* Nous avons proposé une loi de linéarisation partielle couplée à un schéma adaptatif. Cet ensemble donne de très bons résultats sur le modèle cinématique, mais de médiocres sur le modèle dynamique.

Au terme de ce travail, plusieurs axes de recherches s'ouvrent

Sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, notre travail pourrait se prolonger de façon naturelle sur 3 points

Chercher à *rendre exponentiel le taux de convergence de la loi de bouclage d'état instationnaire proposée pour les robots \mathcal{R}_2^* .* La structure géométrique utilisée pour garantir l'évitement des singularités ne rend pas ce problème facile.

Chercher à *gérer les problèmes de singularités des robots multi-corps avec attaches sur essieu.* Il a été signalé à l'Annexe C que ces systèmes peuvent être commandés avec le même type de lois que celles proposées pour les robots mon corps. Ils présentent simplement des singularités additionnelles (par exemple, 2 remorques qui sont à 90°).

Aborder la commande des robots multi-corps avec attaches caravanes. Comme mentionné à l'Annexe C, c'est actuellement un problème ouvert.

Lorsque le glissement est possible. Dès que l'on quitte des hypothèses idéales pour se rapprocher de la réalité, il serait nécessaire, pour rester cohérent, de procéder à des expérimentations. Cependant, dans notre cas, avant de pouvoir envisager des expérimentations, il est nécessaire de travailler encore sur de nombreux points

La commande bien sûr, puisque celle proposée dans ce mémoire n'est pas complètement satisfaisante,

2 problèmes que nous avons laissé de côté dans ce mémoire, étant donné que nous ne considérons que des simulations

il faudrait traiter *les incertitudes paramétriques*. Des pistes ont été proposées à la page 54,

il faudrait également traiter *les erreurs de mesures*. Une piste pourrait être d'utiliser des fonctions de Lyapunov du type de celles données dans [HMC94].

Annexe A

Notions de géométrie différentielle

Cette annexe a été rédigée sur la base de [NS90, Chapitre 2], [Isi89, Annexe A] et [And88, Chapitre 4]. Elle constitue l'un des chapitres de [Thu94]

L'analyse des systèmes linéaires, dans l'approche représentation d'état, repose essentiellement sur des notions d'algèbre linéaire. L'exemple ci-dessous (tiré de ??) montre que l'analyse des systèmes non-linéaires requiert des notions mathématiques plus complexes

Exemple A.1

Soit le système non-linéaire décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 u \end{cases}$$

avec

$x = (x_1, x_2)^T$ vecteur d'état défini sur \mathbb{R}^2

$u = u(t)$, commande du système, scalaire, bornée pour tout t

□

Le système ci-dessus, au vu de sa régularité, admet une unique solution pour tout couple de conditions initiales $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ (cf. par exemple [Har82]). Soit $(x_1(t; t_0, x_0), x_2(t; t_0, x_0))$ la valeur à l'instant t de cette solution. Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad \forall t \geq t_0 \quad \frac{d}{dt} (x_1^2(t; t_0, x_0) + x_2^2(t; t_0, x_0)) &= 0 \\ \forall u(t) \text{ bornée} \end{aligned}$$

L'ensemble des configurations atteignables depuis une configuration initiale (t_0, x_0) , noté $\mathcal{R}_{(t_0, x_0)}$, est par conséquent un cercle immergé dans \mathbb{R}^2 . En Automatique linéaire, les ensembles $\mathcal{R}_{(t_0, x_0)}$ étaient nécessairement des sous-espaces vectoriels. Ici, ce n'est pas le cas. L'ensemble $\mathcal{R}_{(t_0, x_0)}$ associé au système non-linéaire de l'Exemple (A.1) présente les caractéristiques suivantes

c'est un espace de dimension 1,

un sous-ensemble de $\mathcal{R}_{(t_0, x_0)}$ (i.e. un arc de cercle) peut être associé bijectivement à un sous-espace de \mathbb{R} ,

par contre, $\mathcal{R}_{(t_0, x_0)}$ lui-même, qui n'est rien d'autre que $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\|x_0\|\mathbb{Z}}$, ne peut pas être associé bijectivement à un sous-espace de \mathbb{R} .

Ce type d'ensemble, qui n'existe pas en algèbre linéaire, est par contre parfaitement identifié en géométrie différentielle, c'est ce que l'on appelle une variété. Le support mathématique privilégié pour l'analyse et la commande des systèmes non-linéaires, comme illustré par l'Exemple A.1, sera donc la géométrie différentielle.

Nous présentons ci-dessous les éléments de géométrie différentielle utilisés dans ce mémoire.

A.1 Variété, variété C^∞

La définition d'une variété repose sur des concepts de topologie. Nous résumons d'abord ceux-ci, ci-dessous

Définition A.1 Espace topologique

On dit qu'un ensemble S est un espace topologique, si on a pu définir sur S une collection de sous-ensembles, appelés ouverts, vérifiant les axiomes

l'union de plusieurs ouverts est un ouvert,

l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert,

l'ensemble S et l'ensemble vide sont des ouverts. □

Définition A.2 Base d'un espace topologique

On appelle base d'un espace topologique S , notée \mathcal{B}^S une famille d'ouverts de S présentant les propriétés suivantes

l'union de tous les ouverts de \mathcal{B}^S est l'espace S ,

l'intersection non-vide de 2 ouverts de \mathcal{B}^S est nécessairement un ouvert de \mathcal{B}^S ou l'union de plusieurs ouverts de \mathcal{B}^S □

Définition A.3 Voisinage d'un point d'un espace topologique

On appelle voisinage d'un point p appartenant à un espace topologique S tout ouvert contenant p . □

Définition A.4 Propriété de Hausdorff

Un espace topologique S satisfait la propriété de Hausdorff, si quels que soient p_1 et p_2 , 2 points distincts de S , il existe un voisinage U_1 de p_1 et un voisinage U_2 de p_2 tels que U_1 et U_2 aient une intersection vide. □

Définition A.5 Homéomorphisme

Une application H , définie d'un espace topologique S_1 vers un espace topologique S_2 , est dite un homéomorphisme si

H est bijective,

l'image par H de n'importe quel ouvert de S_1 est un ouvert de S_2 ,

l'image par H^{-1} de n'importe quel ouvert de S_2 est un ouvert de S_1 □

Définition A.6 Espace topologique localement euclidien

Un espace topologique S est dit localement euclidien de dimension n , si pour tout point p de S , on peut définir un homéomorphisme entre un voisinage de p et un ouvert de \mathbb{R}^n □

Il est maintenant possible d'écrire les définitions d'une variété, d'une carte sur une variété, et d'un atlas

Définition A.7 Variété

Un espace topologique \mathcal{M} sera appelé variété de dimension n s'il

présente une base dénombrable,

vérifie la propriété de Hausdorff,

est localement euclidien de dimension n . □

Définition A.8 Carte sur une variété

On appelle carte sur la variété \mathcal{M} , tout couple (U, ϕ) , où

U est un ouvert de \mathcal{M}

ϕ est un homéomorphisme reliant U à un ouvert de \mathbb{R}^n □

Définition A.9 Atlas associé à une variété

On appelle atlas associé à une variété \mathcal{M} , une famille de cartes, notée \mathcal{A} , couvrant complètement \mathcal{M}

Soit $I \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ est un atlas si $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$ □

Dit de façon moins formelle, une variété \mathcal{M} de dimension n est un espace abstrait, pouvant cependant être localement identifié à un sous-espace de \mathbb{R}^n grâce à une bijection locale appelée carte.

Les définitions suivantes permettent de définir la régularité d'une application définie sur des variétés.

Considérons d'abord l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \mathbb{R} & \rightarrow \mathcal{M} \\ t & \mapsto & \sigma(t) \end{array}$$

σ est simplement une courbe définie sur la variété \mathcal{M} . Soit (U_0, ϕ_0) une carte définie autour du point $\sigma(t_0)$ (i.e. $\sigma(t_0) \in U_0$). Si σ et (U_0, ϕ_0) vérifient la relation

$$\forall t \geq t_0 \quad \sigma(t) \in U_0 \quad (\text{A.1})$$

il est possible d'identifier l'application σ à l'application $\phi_0 \circ \sigma$

$$\begin{array}{ccc} \phi_0 \circ \sigma & \mathbb{R} & \rightarrow \phi_0(U_0) \subset \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \phi_0 \circ \sigma(t) \end{array}$$

L'application $\phi_0 \circ \sigma$ étant à valeurs réelles, les notions C^r ou C^∞ (\hookrightarrow) ont un sens, et pourront donc être utilisées pour caractériser la régularité de l'application σ

Lorsque σ et (U_0, ϕ_0) ne vérifient pas (A.1), les considérations précédentes permettent de définir uniquement la régularité de la restriction de σ à la carte (U_0, ϕ_0) , puis successivement la régularité de la restriction de σ à chacune des cartes suivantes. Pour définir la régularité globale de σ sur l'ensemble de la variété \mathcal{M} , il apparaît nécessaire de prendre en compte la régularité avec laquelle les différentes cartes se "recoltent" entre elles. La régularité du raccord de 2 cartes est exprimée par la notion de compatibilité

Définition A.10 Compatibilité de 2 cartes

Soit 2 cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) sur une variété \mathcal{M} de dimension n , avec la propriété $U_1 \cap U_2 \neq \{\emptyset\}$. Les 2 cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) sont dites r -compatibles (resp. ∞ compatibles) si l'homéomorphisme $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$, qui échange les représentations des points de $U_1 \cap U_2$ données par chacune des cartes

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 \circ \phi_2^{-1} & \phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \\ & x_2 & \mapsto \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(x_2) = x_1 \end{array}$$

est une application de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n de régularité C^r (resp. C^∞). □

Définition A.11 Atlas C^r , atlas C^∞

Un atlas \mathcal{A} est dit C^r (resp. C^∞) si toutes les cartes qui le composent sont r -compatibles (resp. ∞ -compatibles) entre elles. □

Définition A.12 Atlas r -complet, atlas ∞ -complet

Un atlas \mathcal{A} est dit r -complet (resp. ∞ -complet) si

$$\mathcal{A} \text{ est } C^r \text{ (resp. } C^\infty),$$

¹ Une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$, définie de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n est dite C^r si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre r , de toutes les composantes $f_i, i \in [1, n]$ de f , existent et sont continues. f est dit C^∞ si cette propriété est vraie quel que soit $r \in \mathbb{N}$

toute carte r -compatible (resp. ∞ -compatible) avec les cartes composant \mathcal{A} est elle-même un élément de \mathcal{A} . \square

Définition A.13 Variété C^r , variété C^∞

Une variété \mathcal{M} est dite C^r (resp. C^∞) si elle peut être couverte par un atlas r -complet (resp. ∞ -complet). \square

Ces définitions nous permettent de définir en toute rigueur la régularité d'une application sur des variétés

Définition A.14 Application C^r (resp. C^∞) sur des variétés

Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 2 variétés C^r de dimensions respectives n_1 et n_2 , et soit Z une application de \mathcal{M}_1 vers \mathcal{M}_2

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \mathcal{M}_1 & \rightarrow \mathcal{M}_2 \\ & p & \mapsto Z(p) \end{array}$$

Z est dite C^{r_1} ($r_1 \leq r$) si

pour tout point p de \mathcal{M}_1 , il existe une carte (U_1, ϕ_1) contenant p ,

pour tout point $Z(p)$ de \mathcal{M}_2 , il existe une carte (U_2, ϕ_2) contenant $Z(p)$,

telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} \bar{Z} & \phi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^{n_1} & \rightarrow \phi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{n_2} \\ & x_1 & \mapsto x_2 = \phi_2 \circ Z \circ \phi_1^{-1}(x_1) \end{array}$$

est une application de \mathbb{R}^{n_1} vers \mathbb{R}^{n_2} de régularité C^{r_1}

La définition d'une application C^∞ s'obtient immédiatement en remplaçant ci-dessus C^r et C^{r_1} par C^∞ . \square .

Il est important de noter que la Définition A.14 n'est cohérente que grâce à l'hypothèse de régularité des variétés \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . En effet, soient (U_1, ϕ_1) et (U_3, ϕ_3) deux cartes de \mathcal{M}_1 contenant p , et soient (U_2, ϕ_2) et (U_4, ϕ_4) deux cartes de \mathcal{M}_2 contenant $Z(p)$. Pour étudier la régularité de Z , on peut a priori utiliser indifféremment les applications $\phi_2 \circ Z \circ \phi_1^{-1}$ ou $\phi_4 \circ Z \circ \phi_3^{-1}$. La Définition A.14 ne sera donc cohérente que si ces 2 applications ont même régularité C^{r_1} ($r_1 \leq r$).

C'est bien le cas lorsque \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux variétés C^r , car l'application $\phi_4 \circ Z \circ \phi_3^{-1}$ peut toujours être ré-écrite comme

$$\phi_4 \circ Z \circ \phi_3^{-1} = (\phi_4 \circ \phi_2^{-1}) \circ \phi_2 \circ Z \circ \phi_1^{-1} \circ (\phi_1 \circ \phi_3^{-1})$$

et les applications $(\phi_1 \circ \phi_3^{-1})$ et $(\phi_4 \circ \phi_2^{-1})$, de par la régularité de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , sont toutes deux C^r

Au vu des Définitions A.13 et A.14, une variété C^∞ de dimension n apparaît comme un espace abstrait, pouvant être localement identifié à un sous-espace de \mathbb{R}^n et muni d'une notion équivalente à celle de la différentiabilité des fonctions dans \mathbb{R}^n

Les variétés rencontrées en Automatique non-linéaire sont généralement toutes C^∞ (c'est le cas en particulier dans ce mémoire). Aussi, nous introduisons la convention suivante

Convention A.1 *Sauf mention explicite contraire, nous sous-entendons désormais par le terme variété, une variété C^∞ . Les applications définies sur ces variétés seront elles-aussi, sauf mention contraire, supposées C^∞* \square

Deux cas particuliers d'applications sur des variétés seront fréquemment utilisés dans la suite : d'une part les courbes, notées σ , et d'autre part les fonctions, notées λ

Définition A.15 Courbe sur une variété

On appelle courbe sur une variété M , toute application de \mathbb{R} vers M

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \mathbb{R} & \rightarrow M \\ t & \mapsto & \sigma(t) \end{array} \quad \square$$

Définition A.16 Fonction sur une variété

On appelle fonction sur une variété M , toute application de M vers \mathbb{R}

$$\begin{array}{ccc} \lambda & M & \rightarrow \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \lambda(p) \end{array} \quad \square$$

A.2 Espace tangent à une variété, champ de vecteurs, opérateurs de Lie

Puisque les variétés sur lesquelles nous travaillons sont désormais supposées C^∞ (Convention A.1), nous pouvons introduire la notion de vecteur tangent en un point à une variété

Définition A.17 Vecteur tangent en à point à une variété

Soit M une variété de dimension n , et p , un point appartenant à M . A chaque courbe σ définie sur M et passant par p à un instant quelconque noté t_0 (i.e. $\sigma(t_0) = p$), on associe une application appelée vecteur tangent à M en p , notée F_p^σ , agissant sur l'ensemble, noté Λ , des fonctions sur M , et définie par

$$\begin{array}{ccc} F_p^\sigma & \Lambda & \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & F_p^\sigma(\lambda) = \frac{d\lambda(\sigma(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} \end{array}$$

Dit autrement, un vecteur tangent indique suivant quelle courbe définie sur M on souhaite dériver la fonction λ , il indique une direction qu'il est possible de suivre pour quitter le point p tout en restant sur M . L'indice supérieur σ sur le nom du vecteur tangent est en général omis. \square

Définition A.18 Espace tangent

Soit \mathcal{M} une variété de dimension n , et p , un point appartenant à \mathcal{M} . On appelle *espace tangent* à \mathcal{M} en p , noté $T_p\mathcal{M}$, l'ensemble des vecteurs tangents F_p qu'il est possible de définir au point p .

Dit autrement, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$ représente l'ensemble des directions que l'on peut suivre pour quitter le point p , tout en restant sur la variété \mathcal{M} . \square

Si l'on veut se donner une représentation intuitive de $T_p\mathcal{M}$, ce serait celle d'un plan tangent à la variété \mathcal{M} au point p .

Une propriété essentielle des espaces tangents est la suivante

Propriété A.1 [Isi89, p.416][NS90, p.38]

On montre en géométrie différentielle que $T_p\mathcal{M}$ a une structure d'espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire. \square

Définition A.19 Fibré tangent

On appelle *fibré tangent* à une variété \mathcal{M} noté $T\mathcal{M}$ la réunion de tous ses espaces tangents

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} \quad \square$$

Tous ces éléments nous permettent maintenant d'introduire la notion de champ de vecteurs, qui fournit le cadre rigoureux pour réaliser l'analyse par représentation d'état des systèmes non-linéaires

Définition A.20 Champ de vecteurs

On appelle *champ de vecteurs* sur une variété \mathcal{M} , une application, notée f qui à chaque point p de \mathcal{M} associe un vecteur tangent à \mathcal{M} en p

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\rightarrow T_p\mathcal{M} \\ p &\mapsto f(p) \end{aligned} \quad \square$$

La régularité d'un champ de vecteurs sera définie un peu plus loin (voir Définition A.22 ci-dessous).

L'exemple A.1 montre que pour décrire correctement la configuration d'un système non-linéaire, il faut se placer, non plus dans \mathbb{R}^n comme c'était le cas pour un système linéaire, mais sur une variété. Une représentation d'état précisant par définition la direction dans laquelle évolue un système depuis chacune de ses configurations, sera donc, dans le cas des systèmes non-linéaires, donnée par un champ de vecteurs, ou par la somme de plusieurs champs de vecteurs (on rappelle que $T_p\mathcal{M}$ a une structure d'espace vectoriel Propriété A.1). Un système non-linéaire affine en les commandes peut ainsi être représenté par l'équation ci-dessous

$$\dot{p} = f(p) + \sum_{i=1}^m g_i(p) u_i$$

où

p est le vecteur d'état, appartenant à une variété \mathcal{M} de dimension n ,

$f(p), g_1(p), \dots, g_m(p)$ sont $m+1$ champs de vecteurs définis sur \mathcal{M} ,

u_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de commande u , défini sur \mathbb{R}^m

Afin de caractériser les propriétés d'un système non-linéaire, différentes opérations sur les champs de vecteurs qui le constituent doivent être réalisées. Les deux opérations principales (en dehors de l'addition et de la multiplication par un scalaire) sont la dérivée de Lie et le crochet de Lie dont les définitions sont données ci-dessous

Définition A.21 Dérivée de Lie

Soient λ et f , respectivement une fonction et un champ de vecteurs définis sur une variété \mathcal{M} . On appelle dérivée de Lie de λ par rapport à f , la fonction notée $L_f \lambda$ qui, à chaque point p de \mathcal{M} , associe la valeur de la dérivée de λ selon la direction donnée par le vecteur tangent $f(p)$

$$\begin{aligned} L_f \lambda : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto L_f \lambda(p) = (f(p)) \lambda \end{aligned} \quad \square$$

L'opérateur dérivée de Lie nous permet de définir simplement la régularité d'un champ de vecteurs

Définition A.22 Champ de vecteurs C^r , champ de vecteurs C^∞

Soit \mathcal{M} une variété C^{r+1} , et f un champ de vecteurs sur \mathcal{M} . f est dit C^r si, pour toute fonction C^{r+1} sur \mathcal{M} , la dérivée de Lie de cette fonction par rapport à f est une fonction C^r .

La définition d'un champ de vecteurs C^∞ s'obtient immédiatement en remplaçant ci-dessus C^r et C^{r+1} par C^∞ . \square

La convention suivante sera désormais utilisée

Convention A.2 En complément à la Convention A.1, nous supposons également dans ce qui suit, sauf mention contraire, que les champs de vecteurs sont C^∞ . \square

L'utilité de l'opérateur dérivée de Lie pour les fins de l'Automatique non-linéaire, apparaît immédiatement lorsque l'on considère le système non-linéaire

$$\dot{p} = f(p) \tag{A.2}$$

Au vu de la Définition A.21, $L_f \lambda$ est clairement la dérivée de la fonction $\lambda(p)$ lorsque l'évolution du point p sur la variété \mathcal{M} obéit à la représentation d'état (A.2).

La dérivée de Lie d'une fonction λ étant elle-même une fonction, il est possible de calculer des dérivées de Lie en cascade. On utilisera dans ce cas les notations suivantes

$$\begin{aligned} L_g(L_f \lambda) &\triangleq L_g L_f \lambda \\ L_f(L_f \lambda) &\triangleq L_f^2 \lambda \\ \underbrace{L_{f_1} \dots L_{f_k}}_k \lambda &\triangleq L_{f_1}^k \lambda \end{aligned}$$

Définition A.23 Crochet de Lie

Soit f et g , 2 champs de vecteurs définis sur une variété \mathcal{M} . On appelle crochet de Lie de f et g , le champ de vecteurs noté $[f, g]$, dont la valeur au point p (c'est-à-dire le vecteur tangent $[f, g](p)$) associe à une fonction λ sur \mathcal{M} , le réel défini par

$$([f, g](p))(\lambda) = L_f L_g \lambda(p) - L_g L_f \lambda(p) \quad \square$$

Cette opération peut être géométriquement interprétée comme suit

Propriété A.2 ([NS90, p. 77] par exemple)

Soit le système non-linéaire

$$\dot{p} = g_1(p)u_1 + g_2(p)u_2 \quad (\text{A.3})$$

avec

p , vecteur d'état appartenant à une variété \mathcal{M} de dimension n ,

g_1 et g_2 , 2 champs de vecteurs définis sur \mathcal{M}

u_1 et u_2 , deux commandes scalaires évoluant dans \mathbb{R} .

Ce système peut, depuis chaque configuration p , évoluer dans les directions définies par les vecteurs tangents $g_1(p)$ et $g_2(p)$ (il suffit de choisir l'une des commandes égale à 0). Le crochet de Lie de g_1 et g_2 au point p indique une troisième direction possible d'évolution, qui s'obtient en utilisant une commande un peu plus complexe (avec $T \in \mathbb{R}$ choisi tel que $0 < T \ll 1$)

t	$0 \rightarrow T$	$T \rightarrow 2T$	$2T \rightarrow 3T$	$3T \rightarrow 4T$
$u_1(t)$	1	0	1	0
$u_2(t)$	0	1	0	1

(A.4) \square

La propriété ci-dessus est parfaitement rigoureuse, quelle que soit la variété \mathcal{M} étudiée. Toutefois, afin de garder une présentation simple, nous n'en donnerons la preuve que dans le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ (à la fin de la section A.5, après avoir décrit l'expression simplifiée des différents concepts de géométrie différentielle lorsque la variété étudiée est tout simplement \mathbb{R}^n).

L'utilité de l'opérateur crochet de Lie pour les fins de l'Automatique non-linéaire est également très claire : au vu de la Propriété A.2, le crochet de Lie va jouer un rôle crucial pour analyser la commandabilité et l'observabilité des systèmes non-linéaires.

Le crochet de Lie de 2 champs de vecteurs étant lui-même un champ de vecteurs, il est possible de calculer des crochets de Lie en cascade. On utilisera dans ce cas les notations suivantes

$$\begin{aligned} [f, [f, g]](x) &\triangleq \text{ad}_f^2 g(x) \\ \underbrace{[f, \dots, [f, g]]}_k &\triangleq \text{ad}_f^k g(x) \end{aligned}$$

Nous donnons enfin ci-dessous une liste des principales propriétés vérifiées par ces 2 opérateurs. Toutes peuvent être démontrées très facilement à partir des 2 définitions A.2] et A.23

soit f, g et h , 3 champs de vecteurs définis sur une variété \mathcal{M} ,

soit λ_1 et λ_2 , 2 fonctions définies sur \mathcal{M} ,

soit enfin k_1 et k_2 , 2 réels.

Les opérateurs dérivée et crochet de Lie présentent les propriétés suivantes

le crochet de Lie est bilinéaire :

$$\begin{aligned} [k_1 f + k_2 g, h] &= k_1 [f, h] + k_2 [g, h] \\ [f, k_1 g + k_2 h] &= k_1 [f, g] + k_2 [f, h] \end{aligned}$$

le crochet de Lie est antisymétrique

$$[f, g] = -[g, f]$$

le crochet de Lie vérifie l'identité de Jacobi

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

la dérivée et le crochet de Lie vérifient enfin

$$\begin{aligned} L_{\lambda_1 f} \lambda_2 &= \lambda_1 L_f \lambda_2 \\ [\lambda_1 f, \lambda_2 g] &= \lambda_1 \lambda_2 [f, g] + \lambda_1 L_f \lambda_2 g - \lambda_2 L_g \lambda_1 f \\ L_{[f, g]} \lambda_1 &= L_f L_g \lambda_1 - L_g L_f \lambda_1 \end{aligned}$$

A.3 Espace cotangent, 1-forme

L'espace tangent à une variété \mathcal{M} en un point p , noté ci-dessus $T_p \mathcal{M}$, présentant une structure d'espace vectoriel (Propriété A.1), il est possible de définir et d'exploiter les éléments duaux de ceux détaillés à la section A.2. C'est ce qui est fait ci-dessous.

Définition A.24 Vecteur cotangent

Soit \mathcal{M} une variété, et p , un point appartenant à \mathcal{M} . De par sa définition d'élément dual du vecteur tangent, un vecteur cotangent à \mathcal{M} en p , noté W_p , est une application linéaire qui, à un vecteur tangent à \mathcal{M} en p , associe un réel :

$$\begin{array}{ccc} W_p & T_p \mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & F_p & \mapsto \langle W_p, F_p \rangle \end{array}$$

□

Définition A.25 Espace cotangent

Soit \mathcal{M} une variété, et p , un point appartenant à \mathcal{M} . On appelle *espace cotangent* à \mathcal{M} en p , noté $T_p^*\mathcal{M}$, l'ensemble des vecteurs cotangents W_p qu'il est possible de définir au point p . \square

Définition A.26 Fibré cotangent

On appelle *fibré cotangent* à une variété \mathcal{M} , noté $T^*\mathcal{M}$, la réunion de tous ses espaces cotangents

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M} \quad \square$$

Définition A.27 1-forme

On appelle *1-forme* sur une variété \mathcal{M} , l'élément dual d'un champ de vecteurs. Au vu de la Définition A.20, une 1-forme, notée ω , est une application qui, à chaque point p de \mathcal{M} , associe un vecteur cotangent à \mathcal{M} en p

$$\begin{array}{ccc} \omega & \mathcal{M} & \rightarrow T_p^*\mathcal{M} \\ & p & \mapsto \omega(p) \end{array} \quad \square$$

Parmi les 1-formes, on peut distinguer un sous-ensemble qui est particulièrement utile pour l'analyse des systèmes non-linéaires

Définition A.28 1-forme différentielle exacte

Soit λ une fonction sur \mathcal{M} . On appelle *1-forme différentielle exacte* associée à λ , la 1-forme notée $d\lambda$, dont l'action sur un champ de vecteurs f résulte en la fonction $L_f\lambda$

$$\langle d\lambda, f \rangle = L_f\lambda \quad \square$$

La dénomination *différentielle exacte* traduit simplement que l'action d'une telle 1-forme $d\lambda$ sur un champ de vecteurs f engendre la *dérivée exacte* de la fonction $\lambda(p)$ lorsque l'évolution du point p sur la variété \mathcal{M} obéit à la représentation d'état (A.2). Cette dénomination paraît encore plus naturelle lorsque la variété étudiée est \mathbb{R}^n , cf. équation (A.6)

L'importance des 1-formes différentielles exactes tient au fait qu'elles permettent d'introduire la notion de distributions intégrables (Définition A.36 ci-dessous), élément-clé du Théorème de Fröbenius (Théorème A.1), dont l'importance pour l'analyse des systèmes non-linéaires sera mis en évidence par le Théorème ??

A.4 Distribution, codistribution, théorème de Fröbenius

La dernière notion de géométrie différentielle utilisée par l'Automatique non-linéaire est celle de distribution

Définition A.29 Distribution

On appelle *distribution* sur une variété \mathcal{M} , une application, notée D , qui à chaque point p de \mathcal{M} , associe un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à \mathcal{M} en p

$$\begin{aligned} D : \mathcal{M} &\rightarrow T_p\mathcal{M} \\ p &\mapsto D(p), \text{ sous-espace de } T_p\mathcal{M} \end{aligned} \quad \square$$

Cette définition est tout à fait cohérente puisque, Propriété A.1, $T_p\mathcal{M}$ présente une structure d'espace vectoriel.

La régularité d'une distribution est définie comme suit

Définition A.30 Distribution C^r , distribution C^∞

Soit \mathcal{M} , une variété C^{r+1} . Une distribution D sur \mathcal{M} est dite C^r , si elle peut localement être engendrée par une famille de champs de vecteurs C^r

$$\forall p \in \mathcal{M} \quad \begin{aligned} &\exists U_p \text{ un voisinage de } p \\ &\exists \{f_1, \dots, f_d\}_{d \in \mathbb{N}} \text{ ch. vect. } C^r \quad / \quad \forall q \in U_p \quad D(q) = \text{span}\{f_1(q), \dots, f_d(q)\} \end{aligned}$$

La définition d'une distribution C^∞ s'obtient immédiatement en remplaçant ci-dessus C^r et C^{r+1} par C^∞ \square

Une distribution étant une application à valeurs dans l'espace vectoriel $T_p\mathcal{M}$, il est possible de définir un élément dual

Définition A.31 Codistribution

On appelle *codistribution* sur une variété \mathcal{M} , l'élément dual d'une distribution. Au vu de la Définition A.29, une codistribution, notée Ω , est une application qui, à chaque point p de \mathcal{M} , associe un sous-espace vectoriel de l'espace cotangent à \mathcal{M} en p

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{M} &\rightarrow T_p^*\mathcal{M} \\ p &\mapsto \Omega(p) \text{ sous-espace de } T_p^*\mathcal{M} \end{aligned} \quad \square$$

La Définition A.30 peut être ré-écrite sans difficulté pour définir une codistribution C^r ou C^∞ . Aussi, la convention suivante sera désormais utilisée

Convention A.3 En complément à la Convention A.2, nous supposons dans ce qui suit, sauf mention contraire, que les distributions et les codistributions sont elles-aussi C^∞ \square

Les différentes définitions connexes à celle d'une distribution sont les suivantes

Définition A.32 Dimension d'une distribution

On appelle *dimension* de la distribution D au point p , la dimension du sous-espace vectoriel $D(p)$. \square

Définition A.33 Distribution non-singulière

Une distribution D est dite non-singulière sur $U \subset \mathcal{M}$, si sa dimension est constante pour tout $p \in U$ \square

Définition A.34 Champ de vecteurs appartenant à une distribution

Soient D et f respectivement une distribution et un champ de vecteurs définis sur une variété \mathcal{M} . On dit que f appartient à D si

$$\forall p \in \mathcal{M} \quad f(p) \in D(p) \quad \square$$

Les Définitions A.32 à A.34 peuvent être ré-écrites sans difficulté pour le cas d'une codistribution.

Afin de pouvoir énoncer le Théorème de Fröbenius (Théorème A.1 ci-dessous), nous avons encore besoin d'introduire les notions suivantes

Définition A.35 Annulateur d'une distribution

On appelle annulateur de la distribution D , la codistribution notée D^\perp définie par

$$D^\perp = \{1\text{-forme } \omega \mid \langle \omega, f \rangle = 0 \quad \forall f \in D\} \quad \square$$

Définition A.36 Distribution intégrable

Soit \mathcal{M} une variété de dimension n , et D une distribution non-singulière sur \mathcal{M} de dimension d ($d \leq n$). D est dite intégrable si son annulateur peut être engendré uniquement par des 1-formes différentielles exactes, c'est-à-dire

$$\forall p \in \mathcal{M} \quad \begin{array}{l} \exists U_p \text{ un voisinage de } p \\ \exists \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}\}_{d \in \mathbb{N}} \text{ fonct.} \end{array} \quad / \quad \forall q \in U_p \quad D^\perp(q) = \text{span}\{d\lambda_1(q), \dots, d\lambda_{n-d}(q)\} \quad \square$$

Définition A.37 Distribution involutive

Une distribution D est dite involutive, si le crochet de Lie de 2 champs de vecteurs quelconques appartenant à D est encore un champ de vecteurs appartenant à D , i.e.

$$\forall f, g \in D \quad [f, g] \in D \quad \square$$

Définition A.38 Fermeture involutive d'une distribution

Soit une distribution D définie sur une variété \mathcal{M} . On appelle fermeture involutive de D , notée \bar{D} , la plus petite distribution involutive contenant la distribution D . \square

Nous pouvons enfin énoncer le Théorème de Fröbenius

Théorème A.1 Théorème de Fröbenius [Isi89, p.25], [NS90, p.57]

Une distribution non-singulière est intégrable si et seulement si elle est involutive. \square

A.5 Cas particulier où la variété étudiée est \mathbb{R}^n

Les éléments de géométrie différentielle présentés aux sections précédentes sont tout à fait à même de traiter un problème d'Automatique non-linéaire sans qu'il soit besoin de faire sur celui-ci une quelconque hypothèse. Néanmoins, en pratique, l'hypothèse suivante est très souvent posée

Hypothèse A.1 *Soit un système non-linéaire dont la configuration peut être repérée par un vecteur d'état noté p évoluant sur une variété \mathcal{M} . L'Hypothèse A.1 consiste à supposer que l'ensemble des valeurs que peut prendre p (i.e. l'espace de travail) forme un ouvert U de \mathcal{M} , qui peut être identifié à un sous-espace de \mathbb{R}^n grâce à une carte (U, ϕ) .* \square

L'Hypothèse A.1 peut paraître a priori très restrictive. En effet, en toute rigueur, elle est très rarement vérifiée par les systèmes physiques. Prenons par exemple le cas d'un robot manipulateur à n articulations : le vecteur d'état se compose des angles des différentes articulations du robot ainsi que de la vitesse de rotation de ces dernières. La variété d'état est par conséquent un hyper-cylindre (i.e. $\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n \times \mathbb{R}^n$), et ne peut être envoyée dans sa totalité vers \mathbb{R}^{2n} . Cependant, dans la pratique, on ne souhaite pas faire faire plusieurs rotations sur elles-mêmes aux différentes articulations du robot. On peut donc légitimement considérer que l'espace de travail est simplement la variété $(]-\pi, \pi[\times \mathbb{R})^n$, qui, elle, peut être envoyée dans sa totalité vers un sous-espace de \mathbb{R}^{2n} . Une simplification du même type peut être conduite pour beaucoup des systèmes d'intérêt pratique.

Lorsque l'Hypothèse A.1 est vérifiée, l'étude du système non-linéaire peut être conduite complètement sur $\phi(U)$, c'est-à-dire sur un sous-espace de \mathbb{R}^n . On peut donc faire abstraction de la véritable variété d'état \mathcal{M} et considérer que l'on travaille simplement sur la variété \mathbb{R}^n . Cela simplifie considérablement la définition et la manipulation des concepts présentés dans les sections précédentes. En effet, l'espace tangent à \mathbb{R}^n en un point quelconque x , noté $T_x\mathbb{R}^n$ peut être identifié à \mathbb{R}^n ([NS90, p.39]). Par conséquent, une notion comme le champ de vecteurs, dans le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, est une simple application de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n . Les autres notions introduites dans les sections précédentes se simplifient d'une façon similaire.

La convention d'écriture suivante sera désormais utilisée

Convention A.4 *Un point arbitraire choisi sur une variété sera noté*

p , lorsque la variété considérée est une variété \mathcal{M} quelconque,

x , lorsque la variété considérée est \mathbb{R}^n \square

Comme l'on travaille très souvent sur la variété \mathbb{R}^n , nous donnons ci-dessous l'écriture simplifiée des principaux outils de la géométrie différentielle.

- 1 Un **champ de vecteurs**, associe à un élément p d'une variété \mathcal{M} , un élément de $T_p\mathcal{M}$ (Définition A.20). Comme mentionné ci-dessus, $T_x\mathbb{R}^n$ peut être identifié à \mathbb{R}^n

Par conséquent, lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs se présente tout simplement sous la forme d'une application de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n

Il est représenté, par convention, sous la forme d'un vecteur colonne

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow T_x \mathbb{R}^n (\approx \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La **1-forme** est l'élément dual du champ de vecteurs. Par conséquent, au vu du point 1 ci-dessus, une 1-forme, lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ se présente sous la forme d'une application qui à un élément de \mathbb{R}^n , associe une fonction linéaire sur \mathbb{R}^n . Les champs de vecteurs étant représentés par convention par des vecteurs colonnes, les 1-formes sont représentées par des vecteurs lignes

$$\begin{aligned} \omega: \mathbb{R}^n &\rightarrow \{(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})\} \\ x &\mapsto \omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)) \end{aligned}$$

De cette façon, l'action d'une 1-forme sur un champ de vecteurs se lit comme un produit scalaire

Soient f un champ de vecteurs sur la variété \mathbb{R}^n

ω une 1-forme sur la variété \mathbb{R}^n

$$\text{Dans ce cas } \langle \omega(x), f(x) \rangle = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)) \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) f_i(x)$$

3. La **dérivée de Lie** d'une fonction λ par rapport à un champ de vecteurs f est une fonction qui associe à un élément p d'une variété \mathcal{M} , la valeur de la dérivée de λ selon la direction donnée par $f(p)$, c'est-à-dire le réel $\dot{\lambda}(p)$ lorsque $\dot{p} = f(p)$ (cf. équation (A.2)).

Dans \mathbb{R}^n le calcul d'une dérivée de Lie devient explicite

$$L_f \lambda(x) = \dot{\lambda}(x) = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{A.5})$$

avec $\dot{x} = f(x)$

4. Lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ une **1-forme différentielle exacte** devient également complètement explicite au vu de la Définition A.28 et des points 2 et 3 ci-dessus, la 1-forme différentielle exacte associée à la fonction λ est tout simplement, lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, la 1-forme $d\lambda$ s'écrivant

$$d\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A.6})$$

5. L'opérateur **crochet de Lie** enfin, peut lui-aussi, lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, recevoir une définition explicite Soient f et g , 2 champs de vecteurs sur la variété \mathbb{R}^n

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

et soient $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ et $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ leur matrice jacobienne

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Au vu de la Définition A.23 et du point 3 ci-dessus, le crochet de Lie de f et g est le champ de vecteurs donné par la relation

$$[f, g](x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) \quad (\text{A.7})$$

6. Une **distribution** associée à un élément p d'une variété \mathcal{M} un sous-espace vectoriel de $T_p \mathcal{M}$ (Définition A.29). Puisque $T_x \mathbb{R}^n$ peut être identifié à \mathbb{R}^n , une distribution D sur la variété $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ se présente tout simplement sous la forme d'une application qui à un élément x de \mathbb{R}^n associe une matrice $n \times d$, avec d dimension maximale de D sur \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_x \mathbb{R}^n (\approx \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto D(x) = \begin{pmatrix} D_{[1,1]}(x) & \cdots & D_{[1,d]}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{[n,1]}(x) & \cdots & D_{[n,d]}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La dimension en un point x d'une distribution D sur \mathbb{R}^n est alors simplement le rang au point x de la matrice représentant D , et D est non-singulière si la matrice représentant D est de rang constant sur \mathbb{R}^n

7. Une **codistribution** associée à un élément p d'une variété \mathcal{M} un sous-espace vectoriel de $T_p^* \mathcal{M}$ (Définition A.31). Les éléments de $T_x^* \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les 1-formes sur \mathbb{R}^n , étant représentés par des vecteurs lignes (voir point 2 ci-dessus), une codistribution Ω sur la variété $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ se présente tout simplement sous la forme d'une application qui à un élément x de \mathbb{R}^n associe une matrice $d \times n$, avec d dimension maximale de Ω sur \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_x^* \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Omega(x) = \begin{pmatrix} \Omega_{[1,1]}(x) & \cdots & \Omega_{[1,n]}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{[d,1]}(x) & \cdots & \Omega_{[d,n]}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Enfin, l'annulateur d'une distribution D sur la variété \mathbb{R}^n , au vu de la Définition A.35 et des points 6 et 7 ci-dessus, est simplement le noyau à gauche de la matrice représentant D .

Nous donnons pour finir la preuve de la Propriété A.2 (interprétation géométrique de l'opérateur crochet de Lie) dans le cas particulier où la variété étudiée est \mathbb{R}^n .

Preuve de la Propriété A.2 (dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$) :

La Propriété A.2 affirme que le système (A.3), sous l'action de la loi de commande (A.4), quittera une configuration p en évoluant dans la direction donnée par le vecteur tangent $[g_1, g_2](p)$. Puisque nous nous plaçons dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ (ou tout au moins dans le cas où le système (A.3) satisfait l'Hypothèse A.1), le vecteur d'état ne sera désormais plus noté p , mais x , afin de respecter la Convention A.4. $x(t; t_0, x_0)$ représentera alors la valeur à l'instant t du système (A.3) lorsque qu'à l'instant t_0 , nous avons $x = x_0$, et à partir de l'instant t_0 , la commande (A.4) est appliquée au système. La preuve de la Propriété A.2 consiste à calculer un développement limité de $x(t_0 + 4T; t_0, x_0)$ (on rappelle que par définition, T est un infiniment petit) et à montrer que le terme qui y est prédominant est $[g_1, g_2](x_0)$.

Sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$, l'ensemble constitué par le système (A.3) et la loi de commande (A.4) s'écrit simplement $\dot{x} = g_1(x)$. Par conséquent, $x(t_0 + T; t_0, x_0)$ peut être approché par le développement limité

$$x(t_0 + T; t_0, x_0) = x_0 + T g_1(x_0) + \frac{T^2}{2} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) + o(T^2) \quad (\text{A.8})$$

De la même façon, sur l'intervalle de temps $[t_0 + T, t_0 + 2T]$, le système (A.3) et sa commande (A.4) s'écrivent $\dot{x} = g_2(x)$. $x(t_0 + 2T; t_0, x_0)$ peut donc être approché par le développement limité

$$\begin{aligned} x(t_0 + 2T; t_0, x_0) &= x(t_0 + T; t_0, x_0) + T g_2(x(t_0 + T; t_0, x_0)) + \\ &\quad \frac{T^2}{2} \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x(t_0 + T; t_0, x_0)} g_2(x(t_0 + T; t_0, x_0)) + o(T^2) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A partir de (A.8), on montre facilement que

$$g_2(x(t_0 + T; t_0, x_0)) = g_2(x_0) + T \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) + o(T) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x(t_0 + T; t_0, x_0)} g_2(x(t_0 + T; t_0, x_0)) = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_2(x_0) + o(1) \quad (\text{A.11})$$

Par conséquent, en reportant (A.8), (A.10) et (A.11) dans (A.9), cette dernière relation peut être ré-écrite comme

$$\begin{aligned} x(t_0 + 2T; t_0, x_0) &= x_0 + T(g_1(x_0) + g_2(x_0)) + \\ &\quad \frac{T^2}{2} \left(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) + 2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) + \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_2(x_0) \right) + o(T^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En continuant de la même façon, on montre successivement que

$$\begin{aligned} x(t_0 + 3T; t_0, x_0) &= x_0 + Tg_2(x_0) + \\ &+ \frac{T^2}{2} \left(2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) + \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_2(x_0) - 2 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_2(x_0) \right) + o(T^2) \\ x(t_0 + 4T; t_0, x_0) &= x_0 + T^2 \left(\frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_1(x_0) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} g_2(x_0) \right) + o(T^2) \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

La relation (A.13), au vu de la relation A.7, est en fait

$$x(t_0 + 4T; t_0, x_0) = x_0 + T^2[g_1, g_2](x_0) + o(T^2) \quad (\text{A.14})$$

Ce qui termine la preuve de la Propriété A.2 dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$

◁

Notons que lorsque le système (A.3) est linéaire (i.e. $g_1(x)$ et $g_2(x)$ constants quelle que soit la valeur de x), le crochet de Lie de g_1 et de g_2 est nul quel que soit x (immédiat au vu de (A.7)). Par conséquent, la relation A.13 conduit simplement à $x(t_0 + 4T; t_0, x_0) = x_0 + o(T^2)$. En fait, on peut montrer que $x(t_0 + 4T; t_0, x_0) = x_0$. On retrouve donc le résultat bien connu qu'un système linéaire du type $\dot{x} = Bu$ ne peut évoluer qu'à l'intérieur du sous-espace $x_0 + \text{Im}(B)$. Les calculs précédents viennent de montrer que ce résultat ne s'étend pas aux systèmes non-linéaires, puisque même dans un voisinage de x_0 , ils peuvent évoluer dans une direction perpendiculaire à $\text{span}\{g_1(x_0), g_2(x_0)\}$, à savoir $[g_1, g_2](x_0)$. On peut en fait montrer de la même façon que ci-dessus que le système (A.3) peut quitter une configuration x_0 en évoluant dans la direction donnée par $[g_1, [g_1, g_2]](x_0)$, $[g_2, [g_1, g_2]](x_0)$ ou n'importe quel crochet de Lie de g_1 et g_2 d'ordre supérieur. Il suffit pour cela d'utiliser des lois de commande plus sophistiquées que la loi (A.4). La commandabilité d'un système non-linéaire, au vu de ces faits, sera donc intimement liée à la dimension de la distribution générée par g_1, g_2 et tous leurs crochets de Lie.

Annexe B

Systèmes non-holonomes

Le terme “systèmes non-holonomes” a été utilisé de façon récurrente tout au long de ce mémoire. Il désigne une large classe de systèmes mécaniques, parmi lesquels prend place l'ensemble des robots mobiles à roues, lorsque l'hypothèse d'un roulement pur sans glissement a été retenue pour modéliser le contact roues-sol. Comme mentionné dans l'introduction (Chapitre 1), notre centre d'intérêt dans ce mémoire est, de façon précise, la robotique mobile à roues. Nous nous sommes cependant tournés fréquemment vers la classe plus générale des systèmes non-holonomes car, pour les problèmes de commande, ce groupe de systèmes présente des caractéristiques identiques. Nous avons pu ainsi appliquer au cas des robots mobiles, des propriétés établies pour des systèmes non-holonomes génériques ou pour des systèmes non-holonomes autres que les robots mobiles, et inversement, il est raisonnable de penser que les résultats établis dans ce mémoire peuvent être exploités pour commander des systèmes non-holonomes autres que les robots mobiles. Dans cette annexe, nous avons regroupé, pour mémoire, les principales définitions et propriétés relatives aux systèmes non-holonomes. La définition d'un système non-holonyme et quelques exemples de systèmes physiques appartenant à cette classe sont présentés à la section B.1, plusieurs théorèmes permettant de mettre en évidence si un système physique donné est non-holonyme sont exposés à la section B.2, enfin les principales propriétés relatives à la commande d'une classe de systèmes non-holonomes englobant les robots mobiles à roues sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement sont énumérées à la section B.3.

B.1 Définition et exemples de systèmes non-holonomes

B.1.1 Définition

La définition précise d'un système non-holonyme est donnée ci-dessous

Définition B.1 Système non-holonyme

Soit un système mécanique S , décrit sans ambiguïté par un vecteur d'état p de dimension n , et assujéti à respecter à chaque instant un ensemble de $m < n$ contraintes, qu'en toute

généralité on peut écrire

$$C_i(p^{(j)}, \dot{p}, p, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (\text{B.1})$$

avec

t variable temps,

i index variant dans $\{1, \dots, m\}$,

$\forall i, j$, index variant dans \mathbb{N}^*

$$p^{(j)} = \frac{d^j p}{dt^j},$$

C_i , un ensemble de m fonctions supposées au moins C^∞ . Si l'on garde un point de vue pratique, cette dernière hypothèse n'est pas restrictive. On note en effet en mécanique que les contraintes agissant sur les systèmes réels sont effectivement toujours C^∞ .

Le système S est dit non-holonyme si parmi ces m contraintes, il en existe au moins une qui ne soit pas complètement intégrable, c'est-à-dire qui ne puisse pas être ré-écrite, après multiples intégrations de (B.1), comme

$$C_i^k(p, t) = 0 \quad i \in [1, m] \quad (\text{B.2}) \quad \square$$

Afin d'illustrer cette Définition B.1, considérons successivement les effets sur un système S d'une contrainte complètement intégrable et d'une contrainte qui ne l'est pas.

Soit donc un système S , décrit par un vecteur d'état p de dimension n , et soumis à une unique contrainte notée C_1 . Supposons dans un premier temps que cette contrainte soit complètement intégrable, c'est-à-dire qu'après éventuellement une ou plusieurs intégrations, elle puisse être présentée sous la forme (B.2). De façon évidente, p ne peut alors plus prendre n'importe quelle valeur à un instant t^0 , p doit être tel que la relation $C_1^k(p, t^0) = 0$ soit satisfaite. Cette relation définit, parmi toutes les configurations possibles, un sous-ensemble de dimension $n - 1$ en effet, soit p^0 un état du système satisfaisant la contrainte C_1 à l'instant t^0 , i.e.

$$C_1^k(p^0, t^0) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Le théorème des fonctions implicites (voir [Isi89, p.404] par exemple) assure dans ce cas qu'il existe un voisinage $U^0 \times I^0$ de (p^0, t^0) sur lequel la contrainte $C_1^k(p, t)$ peut être ré-écrite comme

$$p_j = C_1^k(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n, t) \quad (\text{B.4})$$

avec C_1^k , une fonction C^∞ . Sur $U^0 \times I^0$, les $n - 1$ composantes $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ du vecteur p suffisent donc pour décrire sans ambiguïté le système S , la composante

^{***} Une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$, définie de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n est dite C^∞ si toutes les dérivées partielles de toutes les composantes $f_i, i \in [1, n]$ de f , existent et sont continues.

p_j s'en déduisant par (B.4). Cette propriété pouvant être démontrée pour tout état p^0 satisfaisant (B.3), l'ensemble des états admissibles pour S à t_0 est donc bien de dimension $n - 1$. Une contrainte complètement intégrable sur un système S a donc *pour effet de restreindre l'ensemble des états que peut prendre S à un instant donné*. Si S est de dimension n , il est toujours possible de l'étudier localement comme un système de dimension $n - 1$ sans contrainte.

Dans le cas où S est soumis à m contraintes complètement intégrables, on montre de la même façon qu'il est possible localement d'éliminer $m_1 \leq m$ composantes du vecteur d'état, où m_1 est le nombre de contraintes indépendantes^(~2).

Intéressons nous maintenant au cas d'un système S , soumis toujours à une unique contrainte C_1 , mais qui serait cette fois *non complètement intégrable*. D'après la Définition B.1, S est un système non-holonyme.

Considérons d'abord le cas où la contrainte C_1 est du premier ordre, c'est-à-dire s'écrit

$$C_1(\bar{p}, p, t) = 0 \quad (\text{B.5})$$

et ne peut plus être intégrée. Une telle contrainte ne réduit pas l'ensemble des états que prend S à un instant donné si tel était le cas, on pourrait localement exhiber une relation du type (B.4). La contrainte (B.5) n'étant par hypothèse pas complètement intégrable, une telle relation ne peut exister. Puisque p est libre, c'est par conséquent la vitesse \bar{p} du système S qui ne peut pas prendre n'importe quelle valeur à un instant donné si à un instant t^0 , l'état de S est p^0 , alors \bar{p} doit être tel que la relation $C_1(\bar{p}, p^0, t^0) = 0$ soit satisfaite. Une contrainte non-intégrable du premier ordre sur un système S a donc *pour effet de restreindre les possibilités d'évolution du système S depuis chacun des états*. On montre de la même façon que précédemment qu'à un instant t^0 , l'ensemble des vitesses acceptables pour quitter un état quelconque p^0 présente une dimension $n - 1$. Supposons maintenant que C_1 soit non-intégrable, mais du deuxième ordre, c'est-à-dire s'écrit

$$C_1(\bar{p}, \bar{p}, p, t) = 0$$

et ne peut plus être intégrée. Un raisonnement similaire au précédent montre que p et \bar{p} peuvent prendre des valeurs quelconques à un instant donné, c'est cette fois l'accélération $\bar{\bar{p}}$ du système S qui est contrainte. Les possibilités d'évolution du système S depuis chacun des états sont encore une fois réduites, les restrictions portent simplement sur les accélérations plutôt que sur les vitesses. Il en sera de même pour toute contrainte non intégrable d'ordre supérieur. Elles sont cependant rarement rencontrées en mécanique.

En définitive, une contrainte complètement intégrable restreint l'ensemble des états que peut prendre un système S . Elle peut localement être éliminée en réduisant d'une unité la dimension du vecteur d'état. Une contrainte non-intégrable à l'inverse ne réduit

^(~2)le nombre de contraintes indépendantes parmi m contraintes $C_1^i(p, t)$, ..., $C_m^i(p, t)$ est donné par le rang de la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1^i}{\partial p_1} & \frac{\partial C_1^i}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial C_m^i}{\partial p_1} & \frac{\partial C_m^i}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

pas l'ensemble des états admissibles, mais réduit les possibilités d'évolution depuis chaque état. Elle ne peut conduire à aucune réduction du vecteur d'état.

B.1.2 Exemples de systèmes physiques non-holonomes

Il est d'usage de classer les systèmes non-holonomes en 2 catégories, en fonction de l'élément qui cause une restriction des possibilités d'évolution.

- la restriction des possibilités d'évolution découle des conditions de contact du système avec son environnement.

Considérons 2 objets de forme quelconque. Lorsque le contact entre ces 2 objets est ponctuel, le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre présente a priori 6 degrés de liberté — un tel mouvement peut en effet toujours être décomposé en

une translation d'un des objets par rapport à l'autre, soit 3 degrés de liberté correspondant au choix, dans \mathbb{R}^3 de la vitesse linéaire relative du point de contact entre les 2 objets,

une rotation d'un des objets par rapport à l'autre, soit 3 degrés de liberté correspondant au choix, toujours dans \mathbb{R}^3 , de la vitesse instantanée de rotation relative des 2 objets.

Dans de nombreuses applications pratiques, le contact entre un système et son environnement peut être considéré comme ponctuel. Si le système peut évoluer à chaque instant selon les 6 degrés de liberté décrits ci-dessus, il est sans contrainte. Si certains degrés de liberté lui sont interdits, il est alors clairement non-holonyme.

Une description de contact fréquemment utilisée est le roulement pur sans glissement. Elle s'exprime comme suit

d'une part, la vitesse relative linéaire du point de contact entre les 2 objets est nulle,

d'autre part, la vitesse relative de rotation, dirigée selon la perpendiculaire au plan de contact, est elle-aussi nulle.

Seuls sont donc autorisés les 2 degrés de liberté correspondant aux rotations dont l'axe est inclu dans le plan de contact, i.e. le mouvement relatif des 2 objets se limite à une rotation de l'un sur l'autre. Les hypothèses de roulement pur sans glissement, et plus généralement le contact entre 2 objets est discuté en détail dans [Mur90, Chapitre 2].

Il est très courant d'utiliser ces hypothèses lorsque l'on met en équations les systèmes mécaniques suivants

les robots préhenseurs, c'est-à-dire des systèmes mécaniques ayant l'apparence d'une main à 3 ou 5 doigts, pouvant saisir et déplacer des objets. Le contact entre les doigts et l'objet est très souvent (voir [Mur90, Chapitre 2])) modélisé par les hypothèses de roulement pur sans glissement.

les robots mobiles à roues. Le contact entre les roues et le sol est très souvent modélisé par une hypothèse de non-carrossage (i.e. le plan de chacune des roues reste vertical) et par des hypothèses de roulement pur sans glissement légèrement différentes de celles décrites ci-dessus puisque la rotation d'axe perpendiculaire au plan de contact est autorisée. On conserve toutefois toujours un total de 2 degrés de liberté, puisque c'est cette fois la rotation d'axe perpendiculaire au plan de la roue qui est interdite, étant donné que celui-ci doit rester vertical (hypothèse de non-carrossage).

Cette structure très similaire entre les robots mobiles à roues et les robots préhenseurs fait que ces 2 types de systèmes, à première vue très différents, peuvent être commandés sur la base des mêmes outils et des mêmes théorèmes. Le lien entre ces 2 classes de systèmes est par exemple mis en évidence dans [BS95], où la commande d'un robot préhenseur est développée sur la base de résultats connus pour les robots mobiles à roues.

- Les systèmes pour lesquels le caractère non-holonyme provient d'un sous-actionnement. Lorsqu'un système mécanique est complètement actionné, il est possible de spécifier l'accélération de chacune des variables du système au moyen des différents actionneurs. À l'inverse, lorsqu'un système mécanique est sous-actionné, seule l'accélération de quelques variables du système peut être spécifiée au moyen des actionneurs, l'accélération des autres variables étant alors dépendante de la configuration du système et de sa vitesse. Cela se traduit lors de la mise en équations par des contraintes non-intégrables d'ordre 2, parfois intégrables une fois.

Preennent place dans cette catégorie, entre autres, les systèmes suivants

les robots manipulateurs sous-actionnés. Les conditions présentées à la section B.2.2 pour déterminer si des contraintes d'ordre 2 sont complètement intégrables, intégrables une fois ou non-intégrables, avaient été proposées dans [ON91] dans le but initial de commander des robots manipulateurs sous-actionnés. Des études plus récentes, [SNC94] et [CNS95], montrent qu'en exploitant les contraintes non-holonomes, il est effectivement possible de construire des robots manipulateurs à n corps, pouvant être commandés uniquement par 2 actionneurs, ces 2 actionneurs pouvant être par exemple la vitesse de l'extrémité du $n^{\text{ème}}$ corps, voir [DO94].

des systèmes présentant des équations similaires à celles des robots manipulateurs sous-actionnés c'est le cas par exemple du pont-roulant si l'on suppose que la câble est toujours tendu, voir [Bou92].

les satellites sous-actionnés. Il est montré dans [MSPJ94] et [MS95] qu'il est possible de stabiliser l'orientation et la position de tels systèmes (i.e. 6 variables) à l'aide uniquement de 2 commandes, choisies comme étant les couples commandant la rotation du corps selon 2 directions perpendiculaires.

les sous-marins sous-actionnés. L'orientation et la stabilisation de tels systèmes (i.e. 6 variables) peuvent être commandées en utilisant uniquement 4

actionneurs [NS92], [EBS94] et [SDE93]. Un nombre plus réduit d'actionneurs est envisagé dans [WSE95].

B.2 Caractérisation d'une contrainte non-holonyme

Dans cette section, nous présentons plusieurs résultats permettant de déterminer rapidement si certains ensembles de contraintes du premier ordre, section B.2.1, ou du second ordre, section B.2.2, sont complètement intégrables, partiellement intégrables ou non intégrables.

B.2.1 Cas d'une contrainte d'ordre 1, linéaire en les vitesses

Le Théorème B.1 présenté dans cette section concerne exclusivement les systèmes mécaniques assujettis à respecter un ensemble de contraintes du premier ordre *linéaires en les vitesses*, c'est-à-dire des contraintes pouvant être écrites .

$$A(p)\dot{p} = 0 \quad (\text{B.6})$$

avec .

p vecteur d'état du système, de dimension n ,

$A(p)$ matrice $m \times n$, avec $m < n$, de rang plein pour tout p .

Un très grand nombre de systèmes mécaniques présentent de telles contraintes. C'est le cas en particulier des systèmes étudiés dans ce mémoire, i.e. les robots mobiles à roues, lorsque l'on suppose que le contact roue-sol satisfait les hypothèses de roulement pur sans glissement (Proposition 2.12).

En terme de systèmes différentiels extérieurs, ces contraintes définissent un système de Pfaff ([Til94]), et peuvent donc être étudiés à l'aide des outils propres à cette discipline. Une étude similaire peut être conduite à l'aide de la géométrie différentielle, comme le montre le Théorème suivant :

Théorème B.1 Intégrabilité de contraintes du premier ordre, linéaire en les vitesses
(par ex. [CAB91])

Soit un système mécanique \mathcal{S} , décrit sans ambiguïté par un vecteur d'état p de dimension n , et assujetti à respecter à chaque instant un ensemble de $m < n$ contraintes du premier ordre linéaires en les vitesses, c'est-à-dire pouvant être écrites sous la forme (B.6).

Soit $D(p)$ la distribution (Définition A.29 et point 6 de la section A.5) associée à la matrice $A(p)$ par la relation

$$D(p) = \ker(A(p)) \quad (\text{B.7})$$

Si $D(q)$ est C^∞ , alors les m contraintes (B.7) sont complètement intégrables si et seulement si $D(q)$ est involutive (Définition A.37).

Dans le cas contraire, soient $\tilde{D}(p)$ la fermeture involutive de $D(p)$ (Définition A.38), et $n - m^*$ sa dimension. Alors seules m^* contraintes peuvent être intégrées. Le système S est donc maximale non-holonomie si $\dim(\tilde{D}(p)) = n$. \square

Puisque les robots mobiles à roues sont, sous les hypothèses de roulement pur sans glissement, assujetti à de telles contraintes, nous donnons ci-dessous l'idée de la preuve du Théorème B.1

Idee de la preuve du Théorème B.1 Puisque la matrice des contraintes $A(p)$ est supposée de rang plein pour tout p , la distribution $D(p)$ définie par (B.7) est non singulière, de dimension $n - m$. Cette distribution n'est donc intégrable que si elle est involutive, Théorème de Frobenius (Théorème A.1).

Lorsque c'est le cas, on peut construire, Définition A.36 de l'intégrabilité, m fonctions λ_i telles que

$$\langle d\lambda_i(p), d(p) \rangle = 0 \quad \forall d(p) \in D(p) \quad \text{et} \quad \forall p \quad (\text{B.8})$$

Au vu de (B.6) et (B.7), \dot{p} peut être exprimé comme une combinaison linéaire de champs de vecteurs appartenant à $D(p)$. Nous déduisons alors immédiatement de (B.8) que

$$\frac{\partial \lambda_i(p)}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

soit encore que

$$\lambda_i(p) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{B.9})$$

Les m relations (B.9) sont exactement sous la forme (B.2), nous venons donc d'intégrer l'ensemble des contraintes (B.6).

Dans le cas où $D(p)$ n'est pas involutive, une démarche similaire peut être suivie avec sa fermeture involutive $\tilde{D}(p)$. Celle-ci met en évidence que m^* contraintes parmi les m peuvent être intégrées. Les contraintes (B.6) sont donc toutes non-intégrables uniquement si $\dim(\tilde{D}(p)) = n$, c'est-à-dire le système S est maximale non-holonomie si $\tilde{D}(p) = \mathbb{R}^n$
 \triangleleft

B.2.2 Cas d'une contrainte d'ordre 2, provenant d'un sous-actionnement

Nous ne connaissons pas de théorème général permettant de décider si un ensemble de contraintes du second ordre exprimées sous la forme (B.1) est intégrable. Les 2 couples de résultats suivants apportent une réponse à ce problème pour 2 cas particuliers, correspondant à 2 classes de systèmes physiques activement étudiés actuellement : d'une part les robots manipulateurs sous-actionnés et les systèmes similaires (ponts-roulants, ...), et d'autre part les satellites ou les sous-marins sous-actionnés. Ces 2 couples de conditions ne sont pas interchangeables, puisque les systèmes pour lesquels ils ont été établis présentent une structure différente (voir la discussion dans [WSE95]).

Cas des robots manipulateurs sous-actionnés, [ON91]

Le modèle d'un robot manipulateur sous-actionné est donné par

$$\begin{bmatrix} H_a \\ H_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_a \\ c_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_a \\ g_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix} \quad (\text{B.10})$$

avec

$[q_a \ q_u]^T$ le vecteur d'état du système,

$[H_a \ H_u]^T$ la matrice d'inertie,

$[c_a \ c_u]^T$ le vecteur des efforts de Coriolis,

$[g_a \ g_u]^T$: le vecteur des efforts de gravité,

u : le vecteur de dimension m regroupant les commandes disponibles sur ce système.
 Dans le cas d'un robot manipulateur complètement actionné la dimension du vecteur u est n . Nous supposons ici qu'au contraire $m < n$.

Les $n - m$ dernières équations du système (B.10) constituent clairement $n - m$ contraintes du second ordre. En exploitant les propriétés des matrices et vecteurs apparaissant dans (B.10), on montre les résultats suivants

Théorème B.2 [ON91] Intégration partielle des contraintes du système (B.10)

Les $n - m$ contraintes du second ordre agissant sur un robot manipulateur sous actionné (i.e. les $n - m$ dernières équations de (B.10)) sont intégrables 1 fois si et seulement si :

g_u est un vecteur constant,

la matrice d'inertie $[H_a \ H_u]^T$ ne dépend que de q_a . □

Théorème B.3 [ON91] Intégration complète des contraintes du système (B.10)

Les $n - m$ contraintes du second ordre agissant sur un robot manipulateur sous actionné (i.e. les $n - m$ dernières équations de (B.10)) sont complètement intégrables si et seulement si :

ces contraintes sont partiellement intégrables (Théorème B.2),

la distribution $D(q)$ définie par

$$D(q) = \ker(H_u(q))$$

est involutive. □

Cas des satellites et des sous-marins sous-actionnés, [WSE95]

Le modèle d'un satellite ou d'un sous-marin sous-actionné est donné par

$$\begin{pmatrix} M_a \\ M_u \end{pmatrix} \dot{\nu} + \begin{pmatrix} C_a \\ C_u \end{pmatrix} \nu + \begin{pmatrix} D_a \\ D_u \end{pmatrix} \nu + \begin{pmatrix} g_a \\ g_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow m \\ \downarrow n-m \end{matrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{\eta} = J(\eta)\nu \quad (\text{B.12})$$

avec

$[\nu \ \eta]^T$: le vecteur d'état du système,

$[M_a \ M_u]^T$: la matrice d'inertie, constante,

J : une matrice de rang plein,

$[C_a \ C_u]^T(\nu)$: le vecteur des efforts de Coriolis,

$[D_a \ D_u]^T(\nu)\nu$: un vecteur d'amortissement,

$[g_a \ g_u]^T(\eta)$: le vecteur des efforts de gravité,

τ : le vecteur de dimension m regroupant les commandes disponibles sur ce système (avec $m < n$).

Les $n-m$ dernières équations de (B.11) constituent clairement $n-m$ contraintes du second ordre. En exploitant les propriétés des matrices et vecteurs apparaissant dans (B.11) et (B.12), on montre les résultats suivants

Théorème B.4 [WSE95] Intégration partielle des contraintes du système (B.11)-(B.12)

Les $n-m$ contraintes du second ordre agissant sur un satellite ou un sous-marin sous actionné (i.e. les $n-m$ dernières équations de (B.11)) sont intégrables 1 fois si et seulement si,

- g_u est un vecteur constant,
- $C_u + D_u$ est une matrice constante,
- la distribution $D_1(\eta)$ définie par

$$D_1(\eta) = \ker((C_u + D_u)J^{-1}(\eta))$$

est involutive. □

Théorème B.5 [WSE95] Intégration complète des contraintes du système (B.11)-(B.12)

Les $n-m$ contraintes du second ordre agissant sur un satellite ou un sous-marin sous actionné (i.e. les $n-m$ dernières équations de (B.11)) sont complètement intégrables si et seulement si ;

ces contraintes sont partiellement intégrables (Théorème B.4),

$$C_u + D_u = 0,$$

la distribution $D_2(\eta)$ définie par

$$D_2(\eta) = \ker(M_u J^{-1}(\eta))$$

est involutive. □

B.3 Propriétés relatives à la commande de certains systèmes non-holonomes

Dans cette dernière section, nous nous intéressons uniquement aux systèmes mécaniques assujettis à un ensemble de contraintes du premier ordre, linéaires en les vitesses, et toutes non-intégrables. Cet ensemble de systèmes mécaniques englobe, sous les Hypothèses 2.2 de roulement pur sans glissement, et si on se limite à leur modèle réduit (Théorème 2.10), tous les robots mobiles à roues, excepté ceux de la classe \mathcal{R}_0^3 , Proposition 4.2.

Nous noterons toujours p le vecteur d'état de ces systèmes, de dimension n , $A(p)$ la matrice $m \times n$ apparaissant dans l'expression des contraintes ($m < n$) (cf. relation (B.6)) et $D(p)$ la distribution associée à $A(p)$ par la relation (B.7). Puisqu'aucune des m contraintes n'est intégrable, la fermeture involutive de $D(p)$ est égale à \mathbb{R}^n , Théorème B.1. En suivant la même méthodologie qu'à la section 2.3.3, c'est-à-dire en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange et en posant les Hypothèses 2.7 et 2.8, on montre que le modèle dynamique de tels systèmes peut être présenté sous la forme

$$\begin{cases} \dot{p} &= D(p)\eta \\ \dot{\eta} &= v \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

avec η un vecteur de dimension $n - m$ et v le vecteur regroupant les commandes.

Nous énumérons ci-dessous un ensemble de propriétés relatives à la commande de tels systèmes. Nous les avons utilisées, pour le cas des robots mobiles, au Chapitre 4. Cette présentation suit l'article [CAB91]. Une présentation similaire peut être trouvée dans [BRM91] ou [BRM92].

B.3.1 Commandabilité

Il existe plusieurs définitions pour la commandabilité d'un système non-linéaire. Une étude détaillée sur ce sujet peut être trouvée dans [Isi89, Chapitres 1 et 2] ou [NS90, Chapitre 3]. Nous rappelons ici juste les 2 définitions principales.

Soit un système non-linéaire affine en les commandes :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad (\text{B.14})$$

avec

x vecteur d'état de dimension n ,

u_i les m commandes du système,

$f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ $m+1$ champs de vecteurs C^∞

L'ensemble accessible par ce système est défini comme suit

Définition B.2 Ensemble accessible

Soit V un ouvert contenant x_0 et T un scalaire strictement positif. On appelle ensemble accessible par le système (B.14) depuis x_0 pour T et V l'ensemble, noté $R_T^V(x_0)$, des configurations x qu'il est possible d'atteindre depuis x_0 , en suivant pendant $t \leq T$ une trajectoire du système (B.14) correspondant à une commande u au moins continue par morceaux, tout en restant constamment dans V \square

Nous avons alors les 2 définitions suivantes pour la commandabilité du système (B.14)

Définition B.3 [Isi89],[NS90] Système localement accessible

Le système (B.14) est dit localement accessible depuis x_0 si pour tout voisinage V de x_0 et pour tout temps $T > 0$, l'ensemble accessible $R_T^V(x_0)$ contient un ouvert non réduit à l'ensemble vide. \square

Définition B.4 [Sus87] Système small time local controllable

Le système (B.14) est dit Small Time Local Controllable (STLC) si pour tout voisinage V de x_0 et pour tout temps $T > 0$, l'ensemble accessible $R_T^V(x_0)$ contient un ouvert contenant au moins x_0 . \square

De manière très sommaire, on peut dire que la notion d'accessibilité locale garantit que depuis x_0 on peut atteindre, à l'aide de commandes continues par morceaux, un sous-ensemble de l'espace d'état, de même dimension que ce dernier, alors que la notion de small time local controllability assure que l'on peut atteindre n'importe quelle configuration dans un voisinage de x_0 . Cette dernière notion est très proche de la notion de commandabilité pour les systèmes linéaires. L'accessibilité locale coïncide avec la STLC pour des systèmes sans dérive (i.e. $\dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$). Ce n'est pas le cas pour des systèmes avec dérive (systèmes (B.14)).

Pour la personne qui aura à commander le système (B.14), prouver que celui-ci est STLC est beaucoup plus intéressant que prouver l'accessibilité locale. Cependant, comme le montrent les Théorèmes B.6 et B.7, seule l'accessibilité locale peut être établie facilement. C'est pour cette raison que cette notion est couramment utilisée

Théorème B.6 [Isi89],[NS90] Accessibilité locale

Le système B.14 est localement accessible depuis x_0 si, dans un voisinage de x_0 , la plus petite distribution contenant les champs de vecteurs $g_1(x), \dots, g_m(x)$ et invariante par les champs de vecteurs $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ est non-singulière et de dimension n . \square

Théorème B.7 [Sus87] Small Time Local Controllability

Le système B.14 est Small Time Local Controllable si

il est localement accessible,

$$f(0)=0,$$

pour chaque g_i pris séparément, tous les crochets de Lie entre f et g_i , où apparaît un nombre impair de fois f , et un nombre pair de fois g_i , peuvent être exprimés comme combinaison linéaire des crochets de Lie entre f et g_i d'ordre inférieur (où l'ordre d'un crochet de Lie entre f et g_i est la somme du nombre de fois où apparaît f et du nombre de fois où apparaît g_i). \square

Dans le cas des systèmes (B.13), les 2 théorèmes ci-dessus peuvent être utilisés avec succès.

Théorème B.8 [CAB91] Commandabilité des systèmes (B.13)

Les systèmes (B.13) satisfont les Théorèmes B.6 et B.7 pour toute configuration initiale x_0 . Ces systèmes sont donc commandables, même au sens le plus fort, c'est-à-dire STLC. \square

B.3.2 Linéarisabilité exacte

Le principe de la linéarisation exacte d'un système linéaire (B.14) est présenté à la section 4.1.1.b. Il peut être résumé comme suit : existe-t-il un changement de variables difféomorphiques $z = \Psi(x)$ et un changement de commande non-singulier $u(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v$ tels que le système (B.14) puisse être ré-écrit comme un système linéaire commandable ? Une étude détaillée de ce problème peut être trouvée encore une fois dans [Isi89] et [NS90].

Le théorème suivant établit si un système (B.14) est linéarisable de façon exacte

Théorème B.9 [JR80] Linéarisation exacte d'un système non-linéaire

Soit la séquence de distributions .

$$G_i = \text{span}\{ad_i^k g_j, \quad 0 \leq k \leq i, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

Alors le système (B.14) est linéarisable de façon exacte dans un voisinage de x_0 si et seulement si :

- les distributions $G_i, (1 \leq i \leq n-1)$ présentent un rang constant dans un voisinage de x_0 ,
- les distributions $G_i, (1 \leq i \leq n-2)$ sont involutives dans un voisinage de x_0 ,
- la distribution G_{n-1} est de rang n en x_0 . \square

Dans le cas où le système (B.14) n'est pas complètement linéarisable, le théorème suivant donne la dimension du plus grand sous-espace linéarisable

B.3. Propriétés relatives à la commande de certains systèmes non-holonomes 307

Théorème B.10 [Mar86] Dimension du plus grand sous-espace linéarisable

Soit la séquence de distributions

$$\mathcal{G}_0 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

$$\mathcal{G}_i = \text{span}\{ad_f^i g_1, \dots, ad_f^i g_m, \mathcal{G}_{i-1}\}$$

Alors la dimension du plus grand sous-espace linéarisable au sein du système (B.14) est

$$n - \sum_{i=0}^{n-1} (\dim(\mathcal{G}_i) - \dim(\mathcal{G}_{i-1})) \quad \square$$

L'utilisation de ces 2 théorèmes pour le cas des systèmes (B.13) permet d'établir le théorème suivant :

Théorème B.11 [CAB91] Linéarisation exacte des systèmes (B.13)

Les systèmes (B.13) ne sont pas linéarisables de façon exacte. La dimension du plus grand sous-espace linéarisable est $2(n-m)$, pour un vecteur d'état de dimension $2n-m$. \square

B.3.3 Stabilisabilité

Les systèmes (B.13) sont commandables, même au sens STLC (Théorème B.8). Une propriété remarquable est qu'en dépit de leur commandabilité, ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés sur une configuration de repos ($p = p_0, \eta = 0$) par le biais d'une loi de retour d'état au moins continûment différentiable. Ce résultat (Théorème B.13) a été établi à l'aide du Théorème suivant

Théorème B.12 [Bro83] Obstruction de Brockett

Une condition nécessaire pour qu'un système (B.14) soit stabilisable sur une configuration x_0 par une loi de bouclage de l'état au moins continûment différentiable est que l'image, par l'application Υ ,

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\rightarrow f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \end{aligned}$$

de $V_{x_0} \times \mathbb{R}^m$, avec V_{x_0} un voisinage de x_0 , est encore un voisinage de x_0 . \square

Théorème B.13 [CAB91] Stabilisabilité des systèmes (B.13)

Les systèmes (B.13) ne peuvent pas être stabilisés sur une configuration de repos ($p = p_0, \eta = 0$) au moyen d'une loi de bouclage de l'état au moins continûment différentiable. \square

Annexe C

Extensions possibles au cas des robots mobiles multi-corps

Dans ce mémoire, nous avons uniquement considéré le cas de robots mobiles mono-corps (Hypothèse 1). Certains de nos résultats peuvent cependant être généralisés sans difficulté à certains types de robots mobiles multi-corps. Comme cela a été expliqué à la section 2.1, nous n'avons pas souhaité faire apparaître ces robots dans notre présentation pour conserver une unité à ce mémoire (nous n'aurions pas pu être aussi général si nous avions également considéré les robots multi-corps), et pour ne pas obscurcir la présentation sans véritable gain au niveau des résultats (les techniques mises en œuvre auraient été les mêmes).

Avant de conclure ce mémoire, nous donnons juste quelques précisions sur les types de robots mobiles multi-corps qui pourraient être étudiés à l'aide des techniques présentées ici, ainsi que quelques références clés sur ce sujet.

L'étude des robots mobiles à n remorques a été motivée par le problème technique suivant *faire circuler une charge importante dans un environnement très contraint*. Les systèmes à 1 remorque permettent en général de répondre aux problèmes qui sont posés en pratique. Cependant, des systèmes à 2 remorques ont déjà été développés lorsqu'une seule remorque était insuffisante; ce sont par exemple les chariots qui permettent le transport des bagages dans les aéroports, et des systèmes à n remorques sont actuellement envisagés ou en cours de développement. C'est le cas par exemple au sein du projet européen *Teleman/MESSINA* dont le cahier des charges est construire un système mobile qui puisse amener un bras manipulateur et un ensemble d'outils en n'importe quel point d'une centrale nucléaire, en empruntant pour cela les étroits couloirs prévus initialement pour l'homme. Ce système est développé dans le but d'intervenir dans la centrale en situation post-accidentelle. L'analyse préalable a conclu à la réalisation d'un robot mobile multi-corps à 4 éléments. Des études théoriques sur la commande d'un tel système ont déjà été menées ([CNM94], [CN94]) et une validation sur prototype est actuellement en cours. L'étude des systèmes à n remorques n'est donc pas une étude purement académique, mais répond ponctuellement à des problèmes pratiques.

Il existe a priori 2 façons de relier les remorques d'un robot multi-corps

soit au moyen d'attaches sur essieu, voir Figure C.1(a), comme sur les camions semi-remorques,

soit au moyen d'attaches type caravane, voir Figure C.1(b).

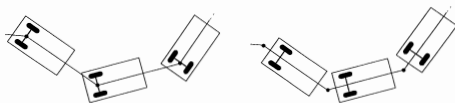


Figure C.1: (a) attaches sur essieu

(b) attaches caravanes

Dans les 2 cas, la modélisation ne pose pas de grosses difficultés : les techniques présentées aux Chapitres 2 et 3 peuvent être utilisées, et conduisent à des modèles plus ou moins simples suivant le choix qui a été fait pour les coordonnées repérant la configuration du robot multi-corps. Des exemples de paramétrisation judicieuses peuvent être trouvées dans [Sø93b], [TSBS94] ou [RFLM93]. En revanche, la commande des robots multi-corps présente plus ou moins de problèmes suivant le type d'attache utilisée : lorsque les différentes composantes du robot multi-corps sont reliées au moyen d'attaches sur essieu, le système peut être commandé à l'aide des techniques présentées ici ou dans la littérature. A l'inverse, lorsque des attaches caravanes sont utilisées, la commande des robots multi-corps est encore bien souvent un problème ouvert. Les résultats clés obtenus sur la commande des robots multi-corps, qui illustrent ces différences, sont énoncés et commentés ci-dessous. Le problème de la commande des robots multi-corps en présence de glissement n'ayant pas, à notre connaissance, fait l'objet de publications, tous ces résultats ont été démontrés sous l'hypothèse que les roues roulent sans glisser sur le sol (i.e. Hypothèse 2.2).

Cas où les différentes composantes du robot multi-corps sont reliées au moyen d'attaches sur essieu

A notre connaissance, le robot mobile multi-corps le plus complexe qui soit actuellement étudié dans la littérature est un robot \mathcal{R}_0^2 tirant une chaîne de n remorques à un essieu (comme celles présentées sur la Figure C.1(a)), parmi lesquelles se trouvent n_a remorques actives ($n_a \leq n$), où par le terme remorque active, nous désignons une remorque dont l'essieu n'est pas solidaire du châssis, mais est orientable grâce à un moteur. Un tel système sera noté dans la suite $\mathcal{RM}_{n_a}^n$. Il présente $n_a + 2$ commandes : les n_a commandes d'orientation des remorques actives plus les 2 commandes du robot \mathcal{R}_0^2 (vitesse et orientation). Ce robot mobile multi-corps est décrit par exemple dans [TSBS94].

Les robots $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ ont été retenus comme système d'étude, car ils peuvent être vus comme les robots multi-corps basiques, dans le sens que les robots multi-corps plus complexes peuvent souvent être ramenés à des robots $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ moyennant un changement de variables et un premier retour d'état. C'est le cas par exemple pour les robots multi-corps tirés non pas par un robot \mathcal{R}_0^2 , mais par un robot \mathcal{R}_1^1 (ce qui est la solution la plus fréquemment utilisée en pratique). D'un point de vue mathématique, un robot \mathcal{R}_1^1 (Figure C.2-gauche) peut en effet toujours être vu comme un robot \mathcal{R}_0^2 tirant une remorque passive (Figure C.2-droite). Un robot \mathcal{R}_1^1 tirant n remorques dont n_a actives, peut par conséquent être étudié comme étant un robot $\mathcal{RM}_{n_a}^{n+2}$. De même, les remorques utilisées

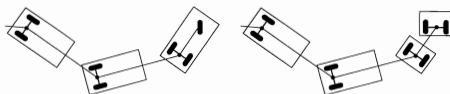


Figure C.2: Un robot \mathcal{R}_1^1 peut être vu comme un robot \mathcal{R}_0^2 tirant une remorque passive

en pratique comportent généralement 2 essieux : l'essieu arrière est fixe par rapport à la châssis, alors que l'essieu avant suit l'orientation de l'axe reliant la remorque à celle qui précède, voir Figure C.3. En utilisant le même raisonnement que celui illustré par la Figure C.2, on montre facilement qu'un robot \mathcal{R}_0^2 tirant n remorques à 2 essieux, dont n_a actives, peut être étudié comme étant un robot $\mathcal{RM}_{n_a}^{2n+1}$. Des détails supplémentaires

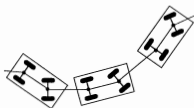


Figure C.3: Remorques à 2 essieux

sur ce sujet peuvent être trouvés dans [TMS95, Section III.D].

Les robots multi-corps les plus répandus actuellement sont les robots sans remorque active (i.e. robots \mathcal{RM}_0^0) : on les retrouve régulièrement dans les aéroports ou les gares pour le chargement/déchargement des bagages. Les robots multi-corps avec remorques actives sont plus confidentiels pour le moment, mais devraient connaître un essor dans les années à venir. L'exemple le plus classique est le camion de pompier américain représenté

sur la Figure C.4 et étudié dans [BTS93], [BTS95]. Ce système est semblable à un camion semi-remorque traditionnel, mais simplement l'essieu de la remorque est orienté par une personne dévolue à cette tâche (le conducteur ne pouvant conduire à la fois le camion et la remorque). Cette commande supplémentaire permet au camion de circuler dans des rues étroites malgré une remorque très longue. Les mêmes contraintes ont conduit les laboratoires travaillant sur le programme européen *Teleman/MESSINA*, dont l'objectif est de réaliser un véhicule multi-corps capable de circuler dans les couloirs d'une centrale nucléaire, à se tourner vers un système où toutes les remorques sont actives (voir [CNM94] et [CN94]). Les robots mobiles multi-corps à remorques actives ne sont donc pas, encore une fois, des systèmes purement académiques, mais permettent de répondre efficacement au problème de circulation dans des environnements très contraints.

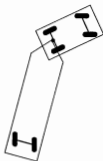


Figure C.4: Exemple de système à remorque active . le camion de pompier

Il a été prouvé, concernant la commande des robots \mathcal{RM}_{na}^n , les résultats suivants

Théorème C.1 Commandabilité [Lau93]

Les robots \mathcal{RM}_{na}^n sont commandables (au sens STLC) depuis chaque configuration. \square

Ce théorème n'est prouvé dans [Lau93] que pour les robots \mathcal{RM}_0^n et dans le cas d'un modèle cinématique. Précisément, il est montré que l'algèbre de Lie construite sur ces systèmes engendre une distribution de dimension maximale en tout point, ce qui établit que ces systèmes sont localement accessibles, et donc bien commandables, puisque ces 2 notions sont équivalentes lorsque les systèmes ne contiennent pas de champ de dérive, comme c'est le cas pour les modèles cinématiques. Ce théorème s'étend cependant sans difficulté aux cas des modèles dynamiques de robots \mathcal{RM}_0^n , grâce à un Théorème de Sussmann [Sus91, Proposition 2], et s'étend alors forcément aux robots \mathcal{RM}_{na}^n , puisque ces systèmes sont identiques aux robots \mathcal{RM}_0^n , exceptés qu'ils présentent des commandes supplémentaires.

Ce théorème est facile à prouver tant que l'on exclut les configurations du robot où 2 modules consécutifs forment un angle droit. Les méthodes classiques pour construire une

base d'une algèbre de Lie (les familles de Hall par exemple) peuvent être utilisées pour prouver la commandabilité du système. Le travail de l'auteur dans [Lau93] a consisté à prouver qu'il était possible de créer des bases plus complexes pour l'algèbre de Lie du système, qui engendrent cette fois une distribution de rang maximale pour toutes les configurations du robot, y compris celles où 2 modules consécutifs forment un angle droit, et donc prouvent la commandabilité du système en *tout point*.

Le Théorème C.1 assure que, quelle que soit la configuration initiale d'un robot $\mathcal{RM}_{n_a}^n$, et quelle que soit la configuration vers laquelle on souhaite l'amener à un instant donné T le déplacement du robot peut être réalisé à l'aide d'une commande boucle ouverte au moins continue par morceaux. Afin de construire explicitement une telle loi de commande, il a été recherché si le modèle d'un robot $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ ne pouvait pas, moyennant un changement de variables et un premier retour d'état, être ré-écrit sous une forme plus standard pour laquelle des résultats sur la construction de lois de commande boucle ouverte existent déjà. Les 2 théorèmes suivants montrent que la forme dite chaînée, introduite initialement dans [MS91], est une forme standard parfaitement appropriée pour l'étude des robots $\mathcal{RM}_{n_a}^n$.

Théorème C.2 Ré-écriture d'un modèle de robot \mathcal{RM}_0^n sous forme chaînée [Sø93b], [Sø93a]

Si durant toute son évolution, un robot \mathcal{RM}_0^n ne passe jamais par une configuration où 2 modules consécutifs forment un angle droit, alors son modèle cinématique peut être mis sous forme chaînée au moyen d'un changement de variables et d'un premier retour d'état statique. La forme chaînée obtenue comporte 1 générateur et une chaîne de $n+2$ variables.

□

Théorème C.3 Ré-écriture d'un modèle de robot $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ sous forme chaînée [TSBS94]

Si durant toute son évolution, un robot $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ ne passe jamais par une configuration où 2 modules consécutifs forment un angle droit, alors son modèle cinématique peut être mis sous forme chaînée au moyen d'un changement de variables et d'un premier retour d'état dynamique. La forme chaînée obtenue comporte 1 générateur et $n_a + 1$ chaînes.

La taille de l'extension dynamique est fonction du nombre de remorques actives et de leur position dans la chaîne de remorques : si les différents modules du robot $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ sont numérotés de 0 à n , avec 0 attribué au robot \mathcal{R}_0^n de tête et n attribué à la dernière remorque, et si n^1 $1 \leq i \leq n_a$ désigne l'ordre dans la chaîne de la $j^{\text{ème}}$ remorque active, alors la procédure de mise sous forme chaînée requiert l'addition de $\sum_{i=1}^{n_a} n_i$ états. Parmi ces nouveaux états, n^1 peuvent être interprétés comme décrivant une chaîne de remorques virtuelles placées devant la première remorque active, et la commande du système augmenté remplaçant la commande en orientation de la première remorque active, est la commande en orientation de la première remorque de cette chaîne virtuelle. L'interprétation est identique pour les n^2 à n^{n_a} autres états supplémentaires. □

La ré-écriture d'un modèle de robot \mathcal{RM}_0^n ou $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ sous une forme chaînée fait apparaître (Théorèmes C.2 et C.3) quelques singularités. Cependant, lorsque le robot est initialement dans l'une de ces configurations, il est en général très facile de l'en sortir au

moyen d'une première commande boucle ouverte il suffit de faire avancer dans une direction constante le robot \mathcal{R}_1^n ; la chaîne des remorques va alors, en temps fini, se "déplier" et former une ligne droite; le système est alors loin des singularités.

Les lois boucle ouverte développées pour commander les systèmes chaînés peuvent par conséquent être utilisées dans tous les cas pour commander les robots $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ soit directement, soit à la suite d'une première commande boucle ouverte si le robot était initialement dans une configuration singulière pour la ré-écriture sous forme chaînée. Les techniques classiques pour amener un système chaîné d'une configuration vers une autre, en boucle ouverte, sont

des commandes sinusoïdales, dont les fréquences sont toutes des multiples d'une fréquence de base,

des commandes constantes par morceaux,

des commandes polynomiales.

L'idée commune à toutes ces techniques est de choisir des lois de commande de structure très simple, de sorte que l'ensemble système chaîné (qui présente lui aussi une structure très simple) et commande puisse être intégré explicitement. Les paramètres constants des lois de commande sont alors ajustés de sorte que la solution explicite ainsi obtenue relie la configuration initiale du système à la configuration souhaitée sur l'intervalle de temps spécifié par l'utilisateur. Des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [Til94] ou [TSBS94].

Les lois de bouclage d'état instationnaires proposées pour les systèmes chaînés ([WB93], [TMW92], ...) pourraient a priori être également utilisées pour stabiliser les robots $\mathcal{RM}_{n_a}^n$ sur une configuration de repos, mais auparavant, il faudrait être capable de garantir que les singularités induites par la mise sous forme chaînée ne sont jamais rencontrées.

Les Théorèmes C.2 et C.3 ont été énoncés en terme de mise sous la forme chaînée. Ils pourraient de façon parallèle être exprimés en terme de mise sous la forme plate canonique, voir par exemple [RFLM93] pour la version parallèle du Théorème C.2.

Cas où les différentes composantes du robot multi-corps sont reliées au moyen d'attaches caravanes

A l'inverse des systèmes avec attaches sur essieu, auxquels il est possible de transposer de nombreux résultats établis pour les robots mono-corps, la commande des robots multi-corps avec attaches caravanes est encore un problème très largement ouvert. Le Théorème suivant, le seul que nous connaissons pour ces systèmes, met bien en évidence la différence fondamentale entre les 2 types d'attaches

Théorème C.4 [RFLM93] Platitudes des robots multi-corps équipés d'attaches caravanes

Le système composé d'un véhicule moteur et d'une remorque reliée à celui-ci par une attache caravane est plat. Les sorties plates n'ont cependant pas une signification physique bien définie elles correspondent aux coordonnées d'un point abstrait n'appartenant généralement pas au robot. Dans le cas des systèmes multi-corps avec attaches sur essieu, les sorties plates étaient plus simplement les coordonnées cartésiennes du centre du dernier essieu dans un repère fixe.

Le système composé d'un véhicule moteur et de 2 ou plus de 2 remorques reliées au moyen d'attaches caravanes n'est pas plat. □

Annexe D

Hypothèses 2.2 : description des différentes classes de robots

Dans cette annexe, nous donnons les parties des preuves des Théorèmes 2.5 et 2.6 qui avaient été omises à la section 2.3.2.b pour ne pas obscurcir l'exposé. Ces théorèmes établissent respectivement que le couple degré de mobilité – degré d'orientabilité (δ_m, δ_o) associé à un robot ne peut prendre que 5 valeurs et que les modèles cinématiques réduits de l'ensemble des robots mobiles constituent 5 classes d'équivalence.

D.1 Preuve du Théorème 2.5

La preuve du Théorème 2.5 est donnée en grande partie à la section 2.3.2.b. Nous avons juste omis, pour des raisons de lisibilité, d'établir 2 résultats intermédiaires. Nous en donnons la preuve maintenant .

D.1.1 Le degré d'orientabilité d'un robot mobile vérifie :

$$0 \leq \delta_o \leq 2$$

A la page 2.30, nous avons affirmé que le degré d'orientabilité δ_o d'un robot mobile quelconque vérifie nécessairement :

$$0 \leq \delta_o \leq 2$$

En effet, considérons des robots ne comportant aucune roue fixe, i.e. $n^f = 0$. Ceux-ci ne peuvent bouger, Proposition 2.13, que si les droites Δ_i associées à chacune des roues directrices sont soit concourantes, soit parallèles, soit superposées. Ces contraintes sont trivialement satisfaites en l'absence de roues directrices ($n^d = 0$). Il en est de même lorsqu'il n'y a qu'une ou deux roues directrices ($n^d = 1$ ou $n^d = 2$) quelle que soit l'orientation de cette ou de ces roues, les contraintes présentées à la Proposition 2.13 sont toujours satisfaites. Cette ou ces roues peuvent par conséquent être orientées indépendamment, δ_o peut donc prendre les valeurs 0, 1 ou 2.

δ_o ne peut par contre, pas prendre de valeurs supérieures – considérons en effet un robot équipé de 3 roues directrices ($n^d = 3$). Si Δ_1 et Δ_2 sont sécantes, alors la seule possibilité pour que la Proposition 2.13 soit satisfaite est que la troisième roue directrice soit orientée

de manière que Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 soient concourantes. De la même façon, si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, alors la seule possibilité pour que la Proposition 2.13 soit satisfaite est que la troisième roue directrice soit parallèle aux deux autres. Par conséquent, si on commande indépendamment l'orientation des roues directrices 1 et 2, il n'existe donc qu'un cas de figure où l'orientation de la troisième roue directrice n'est pas imposée lorsque Δ_1 et Δ_2 sont superposées. Faisons maintenant une permutation circulaire sur les roues directrices orientées indépendamment. En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que lorsque les roues 1 et 3 sont orientées indépendamment, alors l'orientation de la roue 2 est imposée sauf dans le cas de figure où Δ_1 et Δ_3 sont superposées, et lorsque ce sont les roues 2 et 3 qui sont orientées indépendamment, alors l'orientation de la roue 1 est imposée sauf dans le cas de figure où Δ_2 et Δ_3 sont superposées. Pour conclure, il nous faut considérer successivement 2 situations

si les centres des 3 roues directrices ne sont pas alignés, alors les 3 droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 ne peuvent pas être toutes superposées. Par conséquent, nous déduisons de ce qui précède que quelle que soit l'orientation des 3 roues directrices, il existe toujours un choix de 2 roues directrices tel que la donnée de l'orientation de ces 2 roues détermine de manière unique l'orientation de la troisième. δ_o est donc égal à 2.

si les centres des 3 roues directrices sont alignés, les 3 droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 peuvent cette fois être toutes superposées. Toutefois, ce cas de figure ne correspond qu'à une et une seule orientation $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ des 3 roues directrices. Dès que l'on modifie l'orientation de l'une quelconque des 3 roues, on sort de cette situation. On ne peut donc pas, encore une fois, orienter indépendamment les 3 roues directrices. δ_o est donc égal à 2.

Le développement ci-dessus montre clairement que δ_o ne peut jamais être supérieur à 2.

D.1.2 Les couples $(\delta_m, \delta_o) \in \{(3, 1), (3, 2), (2, 2), (1, 0)\}$ sont impossibles

Au vu des inégalités (2.29) et (2.30), 9 couples (δ_m, δ_o) peuvent a priori être formés. En fait, parmi ces 9 couples, 4 ne correspondent pas à des robots réels ou sont associés à des robots ne présentant aucun intérêt pratique. Ce sont :

$$(\delta_m, \delta_o) = (3, 1) \text{ et } (\delta_m, \delta_o) = (3, 2) \cdot$$

De tels couples (δ_m, δ_o) sont impossibles en effet, si pour un robot mobile $\delta_m = 3$, alors le rang de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ qui lui est associée est nul (Définition 2.6 et relation 2.20). Au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, on en déduit que ce robot ne possède ni roue directrice, ni roue fixe ($n^d = n^f = 0$). Par conséquent, δ_o ne peut être égal qu'à zéro.

$$(\delta_m, \delta_o) = (2, 2) \cdot$$

Ce couple (δ_m, δ_o) est lui aussi impossible si un robot comporte 2 roues directrices orientées indépendamment ($\delta_o = 2$), alors la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associée à ce robot est de rang 2. En effet, un rapide calcul montre que les 2 lignes de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ (expression donnée page 29) associées aux roues directrices orientées indépendamment

ne sont jamais colinéaires, excepté pour une et une seule orientation $(\beta_1, \beta_2) [\pi]$ de ces roues directrices. Si le robot comporte d'autres roues directrices ou des roues fixes, $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})$ présente des lignes supplémentaires, qui, ajoutées aux 2 premières, font que cette matrice reste en général de rang 2 même pour l'orientation $(\beta_1, \beta_2) [\pi]$ mentionnée ci-dessus. Si ce n'est pas le cas, nous avons montré (voir discussion précédant l'Hypothèse 2.5) que cette dernière orientation des roues directrices doit être vue comme singulière, c'est-à-dire la commande en orientation des roues directrices doit être calculée de façon à ne jamais amener les roues dans cette situation. Donc en définitive, $\delta_o = 2$ implique que $\text{Rang}(A_{31}(\beta_{1,\dots,n^*})) = 2$, ce qui conduit nécessairement, au vu de la Définition 2.6 et de la relation (2.20) à $\delta_m = 1$

$$(\delta_m, \delta_o) = (1, 0) :$$

Ce couple (δ_m, δ_o) est associé à des robots ne présentant aucun intérêt pratique de tels robots, puisque $\delta_o = 0$, ne possèdent aucune roue directrice. La matrice $S(\beta_{1,\dots,n^*})$ qui leur est associée (relation 2.20) est donc une matrice S constante. C'est même un vecteur, puisque $\delta_m = 1$ (Définition 2.6). Leur modèle cinématique réduit, Théorème 2.3, a donc pour expression

$$\dot{\xi} = S\eta_m = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \eta_m$$

Ce modèle montre clairement que ces robots n'ont qu'un seul mouvement possible si $s_3 = 0$, alors il s'agit de la translation (puisque $\dot{\theta} = 0$) dans la direction déterminée par s_1 et s_2 . Si $s_3 \neq 0$, alors il s'agit de la rotation autour d'un CIR, situé sur la droite perpendiculaire au vecteur $(s_1, s_2)^T$ passant par P , centre du repère attaché au châssis, à une distance algébrique $\frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_3}$ du point P . La seule liberté dont nous disposons sur cette translation ou cette rotation est sa vitesse, que l'on peut spécifier à l'aide du scalaire η_m . Concrètement, ces robots comportent 2 roues fixes dont les perpendiculaires Δ_1 et Δ_2 sont parallèles mais non superposées (\rightarrow translation) ou sécantes (\rightarrow rotation). Les possibilités de mouvement de ces robots sont de façon bien évidente beaucoup trop réduites pour qu'ils puissent être utilisés dans le cadre d'une application pratique.

Aussi, en définitive, le couple (δ_m, δ_o) associé à un robot mobile ne peut donc prendre que les 5 valeurs présentées dans le Théorème 2.5.

D.2 Preuve du Théorème 2.6

La preuve du Théorème 2.6 consiste en une énumération de toutes les classes de robots mobiles pour chacune d'elles, il faut d'une part rechercher l'ensemble des robots mobiles qui la compose, puis d'autre part, montrer qu'il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ de telle sorte que leurs modèles cinématiques réduits soient identiques.

A la section 2.3.2.b, cette démarche a été réalisée uniquement pour la classe \mathcal{R}_1^1 . Nous complétons maintenant la preuve du Théorème 2.6 en étudiant les 4 autres classes.

Auparavant, nous donnons la preuve d'un résultat utilisé abondamment lors de ces études, la Proposition 2.14, que nous avons également omis de donner à la section 2.3.2.b.

D.2.1 Preuve de la Proposition 2.14

La Proposition 2.14 met en évidence une condition nécessaire et suffisante pour que 2 lignes de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n,k})$ soient colinéaires.

Pour prouver cette proposition, considérons 2 lignes quelconques i_1 et i_2 de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n,k})$, et supposons qu'elles soient colinéaires. Dans ce cas, au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, et en notant k le rapport de proportionnalité entre les 2 lignes, le système suivant doit être vérifié

$$\begin{cases} \cos(\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}) &= k \cos(\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}) \\ \sin(\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}) &= k \sin(\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}) \\ l_{i_1} \sin \beta_{i_1} &= k l_{i_2} \sin \beta_{i_2} \end{cases} \quad (D.1)$$

Ce système peut être ré-écrit sous une forme beaucoup plus simple envisageons tout d'abord le cas où les angles $\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}$ et $\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}$ sont tout deux différents de $\frac{\pi}{2}$ modulo $[\pi]$. En divisant la seconde ligne de (D.1) par la première, nous obtenons que

$$\tan(\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}) = \tan(\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}) \iff \alpha_{i_1} + \beta_{i_1} = \alpha_{i_2} + \beta_{i_2} [\pi] \quad (D.2)$$

Enfin, en reportant (D.2) dans les 2 premières lignes de (D.1), il est clair que

$$|k| = 1 \quad (D.3)$$

On obtient les mêmes conclusions lorsque $\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}$ ou $\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}$ sont égaux à $\frac{\pi}{2} [\pi]$. En effet, supposons que $\alpha_{i_1} + \beta_{i_1} = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Les 2 premières lignes de (D.1) s'écrivent dans ce cas

$$\begin{cases} 0 &= k \cos(\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}) \\ 1 &= k \sin(\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}) \end{cases} \quad (D.4)$$

La seconde ligne de (D.4) assure que k est différent de 0. On en déduit, en considérant la première ligne de (D.4), que $\alpha_{i_2} + \beta_{i_2}$ est lui aussi égal à $\frac{\pi}{2} [\pi]$, puis en considérant la seconde ligne de (D.4), que $|k|$ est finalement nécessairement égal à 1. Le raisonnement est identique lorsque l'on suppose initialement que $\alpha_{i_2} + \beta_{i_2} = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Au vu de (D.2) et de (D.3), le système (D.1) peut donc être ré-écrit

$$\begin{cases} \alpha_{i_1} + \beta_{i_1} &= \alpha_{i_2} + \beta_{i_2} [\pi] \\ l_{i_1} |\sin \beta_{i_1}| &= l_{i_2} |\sin \beta_{i_2}| \end{cases} \quad (D.5)$$

En se reportant à définition des angles α et β donnée page 15, il est clair que la première ligne de (D.5) signifie que les roues i_1 et i_2 doivent être parallèles. En s'aidant d'un croquis (Figure D.1), il apparaît alors que la seconde ligne de (D.5) impose que les 2 droites Δ_{i_1} et Δ_{i_2} sont superposées.

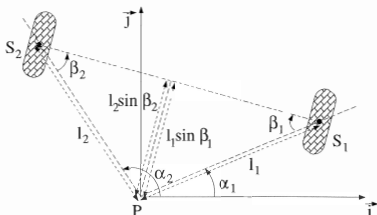


Figure D.1: Représentation des orientations des roues $i_1 = 1$ et $i_2 = 2$ satisfaisant le système (D.5)

D.2.2 Etude détaillée de la classe \mathcal{R}_0^3

Proposition D.1 Robots appartenant à la classe \mathcal{R}_0^3

La classe \mathcal{R}_0^3 est constituée par l'ensemble des robots mobiles ne possédant ni roue directrice, ni roue fixe. \square

Preuve : La matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ associée à un robot de la classe \mathcal{R}_0^3 est de rang 0 (puisque $\delta_m = 3$ Définition 2.6 et relation (2.20)). Au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, il est immédiat que ce robot ne possède ni roue directrice, ni roue fixe $n^{\delta_i} = 0$ (ce qui est en accord avec $\delta_o = 0$) et $n^{\delta_f} = 0$. \triangleleft

Les robots équipés uniquement de roues omnidirectionnelles, dont nous avons discuté à la page 21, sont les robots de la classe \mathcal{R}_0^3 les plus utilisés dans la pratique.

Proposition D.2 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^3

Quels que soit le robot de la classe \mathcal{R}_0^3 considéré et le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ choisi sur le châssis de ce robot, son modèle cinématique réduit s'écrit

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \\ \eta_{m_3} \end{pmatrix} \quad (D.6)$$

La classe \mathcal{R}_0^3 est par conséquent une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6. \square

Preuve : La matrice A_{31} associée à un robot de la classe \mathcal{R}_0^3 étant de rang 0, nous pouvons choisir pour matrice S (relation (2.20)) n'importe quelle matrice 3×3 constante,

de rang plein. Un choix très naturel est

$$S = \text{Identité}_{3 \times 3} \quad (\text{D.7})$$

En reportant (D.7) dans le Théorème 2.3, nous obtenons bien le modèle cinématique réduit D.6. Il est à noter que le choix du repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis n'affecte pas l'expression du modèle (D.6). Il définit le vecteur ξ , c'est-à-dire précise de quel point (x, y) sont les coordonnées et quelle est l'orientation du châssis lorsque $\theta = 0$, mais quel qu'il ait été ce choix, le modèle cinématique réduit d'un robot \mathcal{R}_0^3 est toujours donné par (D.6). <

Proposition D.3 Description des degrés de liberté d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^3

Le modèle (D.6) d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^3 met en évidence 3 degrés de liberté η_{m_1}, η_{m_2} et η_{m_3} . Ceux-ci ont la signification suivante

η_{m_1} est la vitesse linéaire du point P dans la direction donnée par le vecteur \vec{i} , fixe par rapport au châssis,

η_{m_2} est la vitesse linéaire du point P dans la direction donnée par le vecteur \vec{j} , fixe par rapport au châssis,

η_{m_3} est la vitesse de rotation du châssis. □

Preuve : La preuve de la Proposition D.3 est immédiate au vu de la définition des variables du vecteur ξ (section 2.2.1), de la matrice de rotation $R(\theta)$ (relation 2.13) et de (D.6). <

Le choix (D.7) pour la matrice S était donc particulièrement intéressant, car il donne un sens physique clair aux 3 degrés de liberté du modèle η_{m_1}, η_{m_2} et η_{m_3} .

Un exemple de robot appartenant à la classe \mathcal{R}_0^3 est présenté sur la Figure 2.8. Ces robots, et ce seront les seuls, sont omnidirectionnels. Cette propriété remarquable s'observe facilement sur le modèle (D.6) puisqu'il n'existe aucune contrainte, d'une part, sur la vitesse linéaire du point P (celle-ci a pour coordonnées (η_{m_1}, η_{m_2}) , et peut donc être prendre n'importe quelle valeur), et d'autre part, sur la vitesse de rotation du châssis (celle-ci est égale à η_{m_3} et peut donc aussi prendre n'importe quelle valeur), il est possible de faire suivre au point P , fixe sur le châssis, n'importe quelle trajectoire, et simultanément de faire se ré-orienter le châssis selon une loi quelconque. Les robots de la classe \mathcal{R}_0^3 sont donc bien omnidirectionnels.

D.2.3 Etude détaillée de la classe \mathcal{R}_0^2

Proposition D.4 Robots appartenant à la classe \mathcal{R}_0^2

La classe \mathcal{R}_0^2 est constituée par l'ensemble des robots mobiles comportant

aucune roue directrice ($n^d = 0$),

soit une roue fixe, soit plusieurs, mais dans ce dernier cas les roues fixes ont même axe,

enfin, un nombre quelconque de roues désaxées ou de roues omnidirectionnelles, puisque ces roues ne restreignent pas l'évolution d'un robot (relation (2.17)). \square

Preuve : La matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ associée à un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 est de rang 1 (puisque $\delta_m = 2$ Définition 2.6 et relation (2.20)). Elle présente donc nécessairement des lignes toutes colinéaires. La Proposition 2.14 permet de décrire très facilement l'ensemble des robots appartenant à cette classe

puisque pour ces robots $\delta_o = 0$, ceux-ci ne sont équipés d'aucune roue directrice ($n^d = 0$),

δ_m étant égal à 2, la matrice A_{31} qui leur est associée est nécessairement de rang 1. Au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, et tenant compte du fait que $n^d = 0$, nous en déduisons que ces robots comportent au moins une roue fixe ($n^f > 0$). S'ils en comportent plusieurs, celles-ci doivent être disposées de telle sorte que A_{31} reste de rang 1. La Proposition 2.14 montre que la seule possibilité est que les centres des roues fixes soient tous alignés et que ces roues soient orientées de sorte que les droites Δ , qui leur sont associées coïncident avec l'axe défini par les S_i . Dans la suite, pour décrire cette configuration, nous dirons simplement que les roues fixes ont même axe. \triangleleft

Proposition D.5 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2

Quel que soit le robot de la classe \mathcal{R}_0^2 considéré, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis de ce robot est choisi comme suit

P un point quelconque appartenant à l'axe des roues fixes.

\vec{i} dirigé selon l'axe des roues fixes. Le vecteur \vec{j} est dès lors complètement défini. (ce repère est présenté à la Figure 2.9 sur un exemple de robot \mathcal{R}_0^2).

alors son modèle cinématique réduit s'écrit

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

La classe \mathcal{R}_0^2 est par conséquent une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6. \square

Preuve : Pour tout robot de la classe \mathcal{R}_0^2 , il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ comme indiqué à la Proposition D.5. Grâce à ce choix, les angles α_i et β_i associés à chacune des roues fixes ont tous pour valeur 0 $[\pi]$ (cf. définition de α et de β donné page 15). L'expression de la matrice A_{31} se simplifie par conséquent en

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \uparrow n^f$$

Son noyau S est alors clairement donné par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

En reportant (D.9) dans le Théorème 2.3, nous obtenons bien le modèle cinématique réduit D.8. \triangleleft

Proposition D.6 Description des degrés de liberté d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2

Le modèle (D.8) d'un robot de la classe \mathcal{R}_0^2 met en évidence 2 degrés de liberté η_{m_1} et η_{m_2} . Ceux-ci ont la signification suivante

η_{m_1} est la vitesse linéaire du point P

η_{m_2} est la vitesse de rotation du châssis. □

Preuve : On déduit facilement de (D.8) que

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \eta_{m_1} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \eta_{m_2} \quad (\text{D.10})$$

Les relations (D.10) établissent clairement la Proposition D.6. ◁

D.2.4 Etude détaillée des robots de la classe \mathcal{R}_1^2

Proposition D.7 Robots appartenant à la classe \mathcal{R}_1^2

La classe \mathcal{R}_1^2 est constituée par l'ensemble des robots mobiles comportant

aucune roue fixe ($n^f = 0$),

une roue directrice ($n^d = 1$),

enfin, un nombre quelconque de roues désaxées ou de roues omnidirectionnelles, puisque ces roues ne restreignent pas l'évolution d'un robot (relation (2.17)). □

Preuve : Pour qu'un robot prenne place dans la classe \mathcal{R}_1^2 , il faut que les 2 conditions suivantes soient satisfaites

Ce robot possède au moins une roue directrice, de façon que δ_o puisse être égal à 1 (Définition 2.7),

La matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associée à ce robot est de rang 1, de façon que δ_m soit égal à 2 (Définition 2.6 et relation (2.20)).

En s'appuyant une nouvelle fois sur la Proposition 2.14, on montre facilement que la classe \mathcal{R}_1^2 n'est composée que de robots comportant une unique roue directrice et aucune roue fixe. En effet, pour que la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ soit de rang 1, il faut, Proposition 2.14, que les droites Δ_i associées à toutes les roues directrices et à toutes les roues fixes soient superposées. La droite Δ_1 associée à la roue directrice numérotée 1 peut se superposer à la droite Δ_i associée à une roue fixe, mais pour une seule valeur de β_1 . De même, Δ_1 peut se superposer à la droite Δ_2 associée à une autre roue directrice, mais pour une seule valeur du couple (β_1, β_2) . Comme β_1 par définition n'est pas une constante (sinon la roue 1 ne serait plus une roue directrice mais une roue fixe), il apparaît clairement qu'une matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ dont une ligne est associée à une roue directrice ne peut pas être de rang 1 si elle comporte d'autres lignes associées à d'autres roues directrices ou à des roues fixes, ce qui termine la preuve de la Proposition D.7 ◁

Proposition D.8 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^2

Quel que soit le robot de la classe \mathcal{R}_1^2 considéré, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis de ce robot est choisi comme suit

P placé en S_1 , centre de la roue directrice,

(\vec{i}, \vec{j}) quelconque. (ce repère est présenté à la Figure 2.10 sur un exemple de robot \mathcal{R}_1^2).

alors son modèle cinématique réduit s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \beta_1 & 0 \\ \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{m_1} \\ \eta_{m_2} \end{pmatrix} \\ \dot{\beta}_1 &= \eta_o \end{aligned} \quad (D.11)$$

La classe \mathcal{R}_1^2 est par conséquent une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6. \square

Preuve : Pour tout robot de la classe \mathcal{R}_1^2 , il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ comme indiqué à la Proposition D.8. Grâce à ce choix, les constantes l_1 et α_1 sont toutes 2 égales à 0 (on rappelle que l_1 et α_1 sont les coordonnées polaires de S_1 dans $[P, \vec{i}, \vec{j}]$, voir page 15). La matrice $A_{31}(\beta_1)$ associée à ce robot ne comporte qu'une ligne (puisque $n^d = 1$ et $n^f = 0$), voir l'expression de cette matrice donnée page 29, qui s'exprime alors comme

$$A_{31}(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une expression possible pour son noyau $S(\beta_1)$ est

$$S(\beta_1) = \begin{pmatrix} -\sin \beta_1 & 0 \\ \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D.12)$$

En reportant (D.12) dans le Théorème 2.3, nous obtenons bien le modèle cinématique réduit D.11. \triangleleft

Proposition D.9 Description des degrés de liberté d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^2

Le modèle (D.11) d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^2 met en évidence 3 degrés de liberté : η_{m_1} , η_{m_2} et η_o . Ceux-ci ont la signification suivante

- η_{m_1} est la vitesse linéaire de la roue directrice,
- η_{m_2} est la vitesse de rotation du châssis,
- η_o est la vitesse d'orientation de la roue directrice.

Preuve : La signification de η_{m_2} et η_o est immédiate au vu de l'expression du modèle (D.11). Celle de η_{m_1} peut être mise en évidence comme suit on déduit facilement de (D.11) que

$$\eta_{m_1} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

η_{m_1} est par conséquent la vitesse linéaire au point P qui se trouve être également la vitesse linéaire de la roue directrice puisque, avec le choix du repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ que nous avons proposé, $P = S_1$ \triangleleft

D.2.5 Etude détaillée des robots de la classe \mathcal{R}_1^1

Proposition D.10 Robots appartenant à la classe \mathcal{R}_1^1

La classe \mathcal{R}_1^1 est constituée par l'ensemble des robots mobiles comportant

$n^d \geq 1$ roues directrices, l'une pouvant être orientée arbitrairement, les $n^d - 1$ autres lui étant coordonnées

$n^f \geq 1$ roues fixes, de même axe, ce dernier ne passant pas par le centre d'une des roues directrices,

enfin, un nombre quelconque de roues désaxées ou de roues omnidirectionnelles, puisque ces roues ne restreignent pas l'évolution d'un robot (relation (2.17)). \square

Preuve : Nous montrons d'abord que $n^d \geq 1$ et $n^f \geq 1$ sont des conditions nécessaires pour qu'un robot mobile appartienne à la classe \mathcal{R}_1^1 , puis que ces conditions sont suffisantes.

Nécessité la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associée à un robot de la classe \mathcal{R}_1^1 est de rang 2 (puisque $\delta_m = 1$ - Définition 2.6 et relation (2.20). Par conséquent, au vu de l'expression de cette matrice donnée page 29, ce robot comporte au minimum 2 roues fixes ou directrices ($n^d + n^f \geq 2$).

Montrons maintenant qu'il comporte nécessairement au moins une roue directrice et au moins une roue fixe.

de façon que δ_o puisse être égal à 1, il doit comporter au moins une roue directrice,

la nécessité d'une roue fixe, quant à elle, découle du fait que de tels robots ne peuvent pas être équipés uniquement de roues directrices. Quand un robot ne comporte par exemple que 2 roues directrices, la matrice $A_{31}(\beta_{1,2})$ qui lui est associée est de rang 2 pour tous les couples (β_1, β_2) , excepté pour celui correspondant à la configuration où Δ_1 et Δ_2 sont superposées, et pour lequel $A_{31}(\beta_{1,2})$ est de rang 1 (Proposition 2.14). Cette dernière configuration, puisqu'elle est isolée, doit être traitée comme une singularité, c'est-à-dire on fera l'hypothèse que les roues directrices sont orientées de façon à éviter la chute de rang de la matrice $A_{31}(\beta_{1,2})$. Nous reviendrons sur ce problème et donnerons les justifications lors de l'étude de la classe \mathcal{R}_1^1 (discussion à la suite de l'Hypothèse 2.5. Puisque nous supposons que la configuration singulière des roues directrices n'est jamais rencontrée, $A_{31}(\beta_{1,2})$ est de rang 2 pour tout couple (β_1, β_2) . Par conséquent, β_1 et β_2 peuvent toujours être orientés de manière indépendante sans jamais bloquer le robot. On en déduit qu'un robot comportant uniquement 2 roues directrices présente un degré d'orientabilité δ_o égal à 2, et n'appartient donc pas à la classe \mathcal{R}_1^1 . Il en va de même pour les robots équipés exclusivement de $n^d \geq 2$ roues directrices. Aussi, en conclusion, un robot de la classe \mathcal{R}_1^1 comporte au moins une roue fixe.

Suffisance : nous montrons maintenant que tous les robots pour lesquels $n^d \geq 1$ et $n^f \geq 1$ excepté un petit groupe de robots anecdotiques pour lesquels le centre d'une des roues

directrices appartient à l'axe d'une des roues fixes, prennent place effectivement dans la classe \mathcal{R}_1^1 . Pour prouver ce résultat, nous considérons successivement tous les robots pour lesquels $n^d = n^f = 1$, puis $n^d \geq 1$ et $n^f = 1$, enfin $n^d \geq 1$ et $n^f \geq 1$, et étudions à chaque fois s'ils appartiennent effectivement à la classe \mathcal{R}_1^1 .

Cas des robots pour lesquels $n^d = n^f = 1$ les matrices $A_{31}(\beta_1)$ associées à de tels robots sont de rang 2 tant que, Proposition 2.14, les droites Δ_1 et Δ_2 associées aux 2 roues ne sont pas superposées. Ce cas de figure n'est possible que si le centre S_1 de la roue directrice appartient à Δ_2 . Nous l'ignorons car les robots présentant cette particularité n'ont aucun intérêt pratique en effet, au vu de la Proposition 2.13, pour toutes les orientations de la roue directrice, excepté celle pour laquelle Δ_1 et Δ_2 sont superposées, ces robots ne peuvent effectuer qu'un seul mouvement : une rotation autour de S_1 . La seule possibilité pour eux effectuer un autre mouvement est de bloquer la roue directrice (mais qui devient alors une roue fixe) de façon que Δ_1 et Δ_2 soient superposées. Le robot ainsi obtenu appartient à la classe \mathcal{R}_0^2 précédemment décrite. Donc, en définitive, si on élimine ces robots anecdotiques, tous les robots pour lesquels $n^d = n^f = 1$ présentent une matrice $A_{31}(\beta_1)$ de rang constant 2. δ_m est par conséquent égal à 1. δ_o est lui aussi égal à 1 de façon évidente. Ces robots appartiennent donc bien à la classe \mathcal{R}_1^1 .

Cas des robots pour lesquels $n^d \geq 1$ et $n^f = 1$ si, pour les mêmes raisons que précédemment, on ignore les robots pour lesquels le centre de l'une des roues directrices appartient à la droite Δ_1 associée à la roue fixe, alors tous ces robots appartiennent à la classe \mathcal{R}_1^1 . En effet, ces robots anecdotiques ayant été éliminés, les 2 lignes de la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ associées à l'une des roues directrices et à la roue fixe forment un sous-bloc de rang 2. L'orientation des autres roues directrices peut alors être choisie de sorte que la matrice $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ complète reste de rang 2. Cela peut être montré de façon calculatoire. Il est plus simple d'utiliser un raisonnement géométrique : les robots anecdotiques n'étant pas pris en considération, la droite Δ_1 associée à la première roue directrice et la droite Δ_{1f} , associée à la roue fixe ne peuvent être que parallèles non superposées ou sécantes. Dans le premier cas, un mouvement du robot est possible à la condition que les autres roues directrices soient parallèles à la première roue directrice et à la roue fixe (Proposition 2.13). Dans le second cas, un mouvement du robot est également possible si les autres roues directrices sont orientées de sorte que les droites Δ_i associées à toutes les roues directrices et à la roue fixe sont concourantes (toujours Proposition 2.13). Le fait que le robot puisse toujours bouger implique bien que $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^d})$ est restée de rang 2. δ_m est donc égal à 1, δ_o également puisqu'une seule des roues directrices est orientée de manière indépendante.

Cas des robots pour lesquels $n^d \geq 1$ et $n^f \geq 1$ si un robot possède plus d'une roue fixe, alors il n'a d'intérêt pratique que si celles-ci ont même axe. En effet, si les droites associées à 2 roues fixes étaient parallèles non superposées, alors le robot ne pourrait effectuer qu'un seul mouvement, une translation dans la direction donnée par les 2 roues fixes; et si elles étaient sécantes, alors il ne pourrait encore effectuer qu'un seul mouvement, une rotation autour de l'intersection de ces

2 droites (toujours Proposition 2.13). Donc, quand on envisage des robots comportant plusieurs roues fixes, i.e. $n^f \geq 1$, il est nécessaire de les choisir de même axe. Les n^f lignes de la matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ associées à ces roues fixes étant colinéaires (Proposition 2.14), le rang de cette matrice est indépendant du nombre $n^f \geq 1$ de roues fixes. Aussi, on déduit du point précédent que tous robots comportant $n^d \geq 1$ roues directrices et $n^f \geq 1$ roues fixes de même axe appartiennent à la classe \mathcal{R}_1^1 excepté les robots anecdotiques définis ci-dessus. \triangleleft

Proposition D.11 Modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^1

Quel que soit le robot de la classe \mathcal{R}_1^1 considéré, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis de ce robot est choisi comme suit :

P : projection orthogonale de S_1 , centre de la roue directrice, sur l'axe de la (les) roue(s) fixe(s),

\vec{i} : dirigé selon l'axe de la (les) roue(s) fixe(s). Le vecteur \vec{j} est alors complètement défini. (ce repère est présenté à la Figure 2.11 sur un exemple de robot \mathcal{R}_1^1).

alors son modèle cinématique réduit s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{pmatrix} \eta_m \\ \dot{\beta}_1 = \eta_o \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

La classe \mathcal{R}_1^1 est par conséquent une classe d'équivalence au sens du Théorème 2.6. \square

Preuve : La matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ associée à un robot de la classe \mathcal{R}_1^1 possède $n^d + n^f \geq 2$ lignes. Cependant, pour construire le modèle cinématique réduit de ce robot, on ne considérera que la ligne associée à la roue directrice dont l'orientation est libre et la ligne associée à l'une des roues fixes. En effet, nous avons montré ci-dessus (paragraphe sur les robots pour lesquels $n^d = n^f = 1$ page 327) qu'excepté pour quelques robots anecdotiques, que nous ne souhaitons pas modéliser, ces 2 lignes sont de rang 2, quelle que soit l'orientation de la roue directrice, c'est-à-dire ces 2 lignes de la matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ont pour rang, celui de la matrice elle-même. Considérer les autres lignes n'apporterait donc aucune information supplémentaire.

Pour tout robot de la classe \mathcal{R}_1^1 , il est toujours possible de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ comme indiqué à la Proposition D.11. Grâce à ce choix, les angles α_i et β_i associés à chacune des roues fixes ont tous pour valeur 0 $[\pi]$ (cf. définition de α et de β données page 15). De même, l'angle α_1 associé à la roue directrice est égal à $\frac{\pi}{2} [\pi]$, ce qui permet plusieurs simplifications trigonométriques. Les 2 lignes de la matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ que nous devons considérer s'écrivent alors

$$A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & -\cos \beta_1 & L \sin \beta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de $A_{31}(\beta_{1,\dots,n^a})$ est alors très simple à calculer.

$$S(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ L \sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

En reportant (D.14) dans le Théorème 2.3, nous obtenons bien le modèle cinématique réduit D.13. \triangleleft

On note que, comme cela avait été annoncé à la section 2.3.2.a, S ne dépend que de β_{1,\dots,δ_n} , c'est-à-dire dans notre cas, uniquement de β_1 .

Proposition D.12 Description des degrés de liberté d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^1

Le modèle (2.32) d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^1 met en évidence 2 degrés de liberté η_m et η_o . Ceux-ci ont la signification suivante

η_o est la vitesse d'orientation de la roue directrice,

- η_m est la vitesse linéaire de la roue directrice divisée par l_1 \square

Preuve : La signification de η_o est immédiate au vu du modèle (D.13). Celle de η_m peut être mise en évidence comme suit \vec{V}_{S_1} , vitesse linéaire du centre de la roue 1 et \vec{V}_P , vitesse linéaire au point P , \vec{V}_P , sont reliées par (Théorème 2.1) :

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_P + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{PS_1}$$

soit encore, en développant cette relation selon la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{V}_{S_1} = R(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

En reportant (D.13) dans (D.15), on obtient finalement

$$\vec{V}_{S_1} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \beta_1 \\ l_1 \sin \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \eta_m$$

en donc en particulier que

$$\|\vec{V}_{S_1}\| = l_1 |\eta_m| \quad \triangleleft$$

Annexe E

Résultats techniques concernant les robots \mathcal{R}_2^1

Lors de l'étude de la modélisation et de la commande des robots \mathcal{R}_2^1 (respectivement section 2.4 et chapitre 4), les preuves de certains théorèmes ou propositions, purement calculatoires, ont été omises afin de ne pas obscurcir l'exposé. Nous les avons regroupées dans cette annexe.

E.1 Résultats techniques concernant la modélisation des robots \mathcal{R}_2^1

E.1.1 Preuve de la Proposition 2.19

Dans cette section, nous donnons la preuve de la proposition suivante, citée à la section 2.4, page 62

Proposition 2.19 \mathcal{O} ne peut pas être paramétré par un couple de 2 variables

Dans le cas des robots équipés de $n^{\text{dt}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, \mathcal{O} est une variété de dimension constante 2, ne pouvant pas être décrite dans sa totalité par une seule carte. \mathcal{O} ne peut donc pas être complètement paramétré par un couple de 2 variables. \square

Preuve : Nous donnons la preuve de la Proposition 2.19 dans le cas où $n^{\text{dt}} = 3$. Comme cette preuve est basée sur des arguments topologiques, elle s'étend assurément au cas $n^{\text{dt}} > 3$.

Considérons donc un robot équipé de $n^{\text{dt}} = 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés. Le Théorème 2.13 propose de choisir le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ centré sur S_1 , centre de la roue directrice 1. La matrice $A_{31}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ associée à ce robot s'écrit alors (cf. expression générale de cette matrice donnée page 29)

$$A_{31}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2) & \sin(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \sin \beta_2 \\ \cos(\alpha_3 + \beta_3) & \sin(\alpha_3 + \beta_3) & l_3 \sin \beta_3 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Dans le cas d'un robot ne comportant que 3 roues directrices, l'ensemble \mathcal{O} est défini par (cf. relation (2.55))

$$\mathcal{O} = \{\beta_1, \dots, \beta_n \mid \det(A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)) = 0\} \quad (\text{E.2})$$

En reportant (E.1) dans (E.2), nous obtenons plus précisément que

$$\mathcal{O} = \{\beta_1, \dots, \beta_n \mid \rho(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0\} \quad (\text{E.3})$$

avec

$$\rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = l_3 \sin \beta_3 \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) - l_2 \sin \beta_2 \sin(\alpha_3 + \beta_3 - \beta_1) \quad (\text{E.4})$$

La partie la plus calculatoire dans la preuve de la Proposition 2.19 consiste à montrer que l'ensemble \mathcal{O} donné par (E.4) est une variété de dimension constante 2. Une fois que ce résultat est prouvé, la Proposition 2.19 est immédiate. En effet, puisque \mathcal{O} est défini sur un compact (\mathcal{O} est défini sur $(\frac{\mathbb{R}}{2\pi})^3$) et puisqu'il est l'image inverse d'un fermé, précisément $\{0\}$, par une fonction C^∞ , précisément ρ (relation (E.3)), \mathcal{O} est clairement une variété de dimension constante compacte et fermée. La géométrie différentielle assure que de tels ensembles ne peuvent pas être décrits par une seule carte, ce qui établit la Proposition 2.19.

Nous prouvons maintenant le seul point laissé en suspens, à savoir que \mathcal{O} est de dimension constante 2. Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que la jacobienne de $\rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est de rang constant 1 pour tous les triplets $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ appartenant à \mathcal{O} .

Nous notons $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, la matrice jacobienne de la fonction $\rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, i.e.

$$J(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left[\frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_2} \quad \frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_3} \right] \quad (\text{E.5})$$

$J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ étant une matrice ligne, elle est de rang constant 1 si et seulement si ses éléments ne s'annulent jamais simultanément. Nous recherchons ci-dessous les orientations $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ des roues directrices annulant respectivement $\frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_1}$, $\frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_2}$ et $\frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_3}$, et montrons que ces orientations forment des ensembles n'ayant aucun élément commun.

Nous identifions tout d'abord l'ensemble noté \mathcal{B}_1 des orientations des roues directrices qui appartiennent à \mathcal{O} et annulent $\frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_1}$. Ces triplets $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vérifient par définition

$$\begin{cases} \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 0 \\ \frac{\partial \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_1} = 0 \end{cases}$$

i.e. en utilisant (E.4)

$$\begin{cases} l_3 \sin \beta_3 \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) - l_2 \sin \beta_2 \sin(\alpha_3 + \beta_3 - \beta_1) & = 0 \\ -l_3 \sin \beta_3 \cos(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) + l_2 \sin \beta_2 \cos(\alpha_3 + \beta_3 - \beta_1) & = 0 \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Le système (E.6) admet clairement 2 groupes de solutions

Soit $\sin \beta_2 = \sin \beta_3 = 0$. C'est-à-dire sont solutions du système (E.6), tous les triplets de la forme

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\star, 0 \ [\pi], 0 \ [\pi]) \quad (\text{E.7})$$

$$\text{Soit } \begin{vmatrix} l_3 \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) & -l_2 \sin(\alpha_3 + \beta_3 - \beta_1) \\ -l_3 \cos(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) & l_2 \cos(\alpha_3 + \beta_3 - \beta_1) \end{vmatrix} = \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_3 - \beta_3) = 0$$

Dans ce cas, le système (E.6) se ré-écrit comme

$$\begin{cases} \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) (l_3 \sin \beta_3 \pm l_2 \sin \beta_2) = 0 \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_1) (-l_3 \sin \beta_3 \pm l_2 \sin \beta_2) = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_2 \ [\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} l_3 |\sin \beta_3| = |l_2 \sin \beta_2| \\ \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_2 \ [\pi] \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

Ces 2 groupes de solutions ont une interprétation géométrique très simple

Au vu de la définition de β donnée page 15, $\beta_2 = \beta_3 = 0 \ [\pi]$ traduit que les droites Δ_2 et Δ_3 sont sécantes en P , c'est-à-dire en S_1 , compte tenu du choix que nous avons fait pour le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$. Les orientations des roues directrices (E.7) sont donc celles associées à un *CIR* confondu avec S_1 (Proposition 2.13).

Le système d'équations (E.8) est identique au système (D.5). Nous avons alors montré, à l'aide de la Figure D.1, qu'il traduit que l'orientation des roues 2 et 3 est telle que les droites perpendiculaires à ces 2 roues, i.e. Δ_2 et Δ_3 , sont superposées.

On constate que les orientations des roues directrices appartenant à B_1 sont celles pour lesquelles, connaissant β_2 et β_3 , il est impossible d'en déduire β_1 . Ce résultat était prévisible le Théorème des fonctions implicites ([Isi89, section A] par exemple) assure en effet que, si pour un triplet $(\beta_1^0, \beta_2^0, \beta_3^0)$, nous avons $\frac{\partial \varphi(\beta_1^0, \beta_2^0, \beta_3^0)}{\partial \beta_1} \neq 0$, alors il existe dans le voisinage de ce triplet, une fonction ϖ telle que $\beta_1 = \varpi(\beta_2, \beta_3)$. D'où, par contradiction, notre résultat.

B_2 et B_3 , ensembles des orientations des roues directrices qui appartiennent à \mathcal{O} et annulent respectivement $\frac{\partial \varphi(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_2}$ et $\frac{\partial \varphi(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\partial \beta_3}$, peuvent être identifiés exactement de la même manière que B_1 . On montre que

B_2 est constitué par les orientations des roues directrices associées avec un *CIR* confondu avec S_2 ou telles que Δ_1 et Δ_3 sont superposées.

B_3 est constitué par les orientations des roues directrices associées avec un *CIR* confondu avec S_3 ou telles que Δ_1 et Δ_2 sont superposées.

Le fait qu'aucune orientation des roues directrices n'appartienne aux 3 ensembles B_1 , B_2 et B_3 montre que $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est de rang constant 1, et donc termine la preuve de la Proposition 2.19. \triangleleft

E.1.2 Preuve de la Proposition 2.21

Dans cette section, nous donnons la preuve de la proposition suivante, citée à la section 2.4, page 66

Proposition 2.21 Expression de σ en fonction des β_1, \dots, β_n

De manière à utiliser des grandeurs de même dimension que σ nous introduisons les constantes suivantes

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} \quad \sigma_i = \frac{1}{l_i} \quad (\text{E.9})$$

Le couple (α_i, σ_i) peut, comme le couple (α_i, l_i) , décrire la position sur le châssis de la roue directrice i . Alors, si le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ attaché au châssis du robot est choisi centré sur S_1 (ce choix, différent de celui proposé à la section 2.3.2, sera motivé lors de la construction du modèle à la section 2.4.3), l'expression de σ pour tout élément de O_{ns} est donnée par la relation C^∞

$$\sigma = \frac{\sum_{i=2}^n \sin \beta_i \sin(\alpha_i + \beta_1 - \beta_1)}{\sum_{i=2}^n \frac{\sin^2 \beta_i}{\sigma_i}} \quad (\text{E.10})$$

Preuve : Pour prouver la Proposition 2.21, nous considérons successivement les 2 possibilités les roues directrices ne sont pas toutes parallèles, puis les roues directrices sont toutes parallèles.

Au vu de la définition donnée page 15 des angles α_i et β_i associés à une roue, et étant donné que le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$ est choisi centré en S_1 , le vecteur β_1, \dots, β_n dans le cas où les roues directrices sont toutes parallèles, s'écrit

$$\text{Les roues directrices sont toutes parallèles} \iff \beta_1, \dots, \beta_n = (\beta_1, -\alpha_2 + \beta_1, \dots, -\alpha_n + \beta_1)^T \quad (\text{E.11})$$

La relation (E.11) peut également s'obtenir à partir d'un croquis

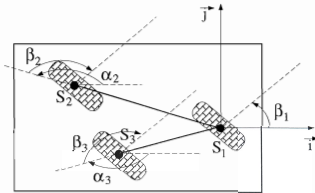


Figure E.1: Configurations $\beta_1, \dots, \beta_n = (\beta_1, -\alpha_2 + \beta_1, \dots, -\alpha_n + \beta_1)^T$

Cas où les roues directrices ne sont pas toutes parallèles

Dans ce cas de figure, le *CIR* se trouve à l'intersection des droites Δ_i , $1 \leq i \leq n^d$ (Proposition 2.13). Par conséquent, pour exprimer σ en fonction de $\beta_1, \dots, \beta_{n^d}$, nous pouvons tout simplement écrire les équations de chacune de droites Δ_i et calculer les coordonnées de leur intersection. C'est ce que nous faisons ci-dessous.

Mise en équations

Les équations des différentes perpendiculaires, dans le repère $[S_1, \vec{i}, \vec{j}]$, sont (avec (ζ_x, ζ_y) les coordonnées courantes dans ce repère)

Δ_1 c'est la droite passant par $S_1 = (0, 0)^T$, et dont le vecteur directeur (au vu de la définition de β donnée page 15) est $(\cos \beta_1, \sin \beta_1)^T$, donc

$$\Delta_1 \quad -\sin \beta_1 \zeta_x + \cos \beta_1 \zeta_y = 0 \quad (\text{E.12})$$

Δ_2 ($2 \leq i \leq n^d$) c'est la droite passant par $S_i = (l_i \cos \alpha_i, l_i \sin \alpha_i)^T$, et dont le vecteur directeur (au vu de la définition de β donnée page 15) est $(\cos(\alpha_i + \beta_i), \sin(\alpha_i + \beta_i))^T$, donc

$$\Delta_i (2 \leq i \leq n^d) \quad -\sin(\alpha_i + \beta_i) \zeta_x + \cos(\alpha_i + \beta_i) \zeta_y + l_i \sin \beta_i = 0 \quad (\text{E.13})$$

Nous en déduisons que les coordonnées du *CIR* dans le repère $[S_1, \vec{i}, \vec{j}]$, notées $\bar{\zeta}_x$ et $\bar{\zeta}_y$

$$\text{CIR} \quad (\bar{\zeta}_x, \bar{\zeta}_y)^T$$

sont les solutions du système

$$\begin{cases} -\sin \beta_1 \bar{\zeta}_x + \cos \beta_1 \bar{\zeta}_y = 0 \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) \bar{\zeta}_x + \cos(\alpha_2 + \beta_2) \bar{\zeta}_y + l_2 \sin \beta_2 = 0 \\ -\sin(\alpha_{n^d} + \beta_{n^d}) \bar{\zeta}_x + \cos(\alpha_{n^d} + \beta_{n^d}) \bar{\zeta}_y + l_{n^d} \sin \beta_{n^d} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

ou de façon équivalente, les solutions de l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) & \cos(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \sin \beta_2 \\ -\sin(\alpha_{n^d} + \beta_{n^d}) & \cos(\alpha_{n^d} + \beta_{n^d}) & l_{n^d} \sin \beta_{n^d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_x \\ \bar{\zeta}_y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.15})$$

Unicité des solutions

Cette équation matricielle définit une et une seule solution $(\bar{\zeta}_x, \bar{\zeta}_y)^T$. En effet, puisque nous ne considérons pas le cas où les Δ_i sont toutes superposées (cette orientation des roues directrices appartient à \mathcal{O}_s), et puisque nous avons exclu pour le moment le cas où les roues directrices sont toutes parallèles, les droites (E.12) et (E.13) sont nécessairement concourantes (Proposition 2.13). Leur intersection existe donc et est bien réduite à un point. La

même propriété peut être retrouvée par un calcul direct. la matrice apparaissant dans l'équation (E.15) est exactement la même que la matrice $A_{31}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ donnée page 29, à une permutation de colonnes près. Cette dernière présentant un rang 2 pour tout $\beta_{1, \dots, n} \in \mathcal{O}_n$ (Définition 2.12), il en est de même pour la matrice de l'équation (E.15). Son noyau est par conséquent de rang 1, nous le noterons $\tilde{S}(\beta_1, \dots, \beta_n)$. L'équation matricielle (E.15) peut alors être écrite de manière équivalente

$$(\bar{\zeta}_x, \bar{\zeta}_y, 1)^T = \kappa(\beta_1, \dots, \beta_n) \tilde{S}(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad (\text{E.16})$$

avec $\kappa(\beta_1, \dots, \beta_n)$, une fonction scalaire ne passant jamais par zéro. De façon évidente, l'égalité entre les 2 termes de (E.16) n'est possible que si la troisième composante de $\tilde{S}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ est non nulle. Montrons à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que ceci est toujours vérifié

Supposons que la troisième composante de $\tilde{S}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ soit nulle. Alors, les 2 premières colonnes de la matrice apparaissant dans (E.15) doivent être colinéaires, i.e.

$$\begin{pmatrix} -\sin \beta_1 \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) \\ -\sin(\alpha_n + \beta_n) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2) \\ \cos(\alpha_n + \beta_n) \end{pmatrix} \quad (\text{E.17})$$

avec $k(\beta_1, \dots, \beta_n)$, également une fonction scalaire ne passant jamais par zéro. On déduit facilement de (E.17) qu'une telle égalité n'est possible que si

$$\tan \beta_1 = \tan(\alpha_2 + \beta_2) = \dots = \tan(\alpha_n + \beta_n)$$

$$\text{ou } \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \dots = \alpha_n + \beta_n = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

c'est-à-dire, si

$$\beta_{1, \dots, n} = (\beta_1, -\alpha_2 + \beta_1, \dots, -\alpha_n + \beta_1)^T$$

Ces vecteurs $\beta_{1, \dots, n}$ correspondent au cas où les roues directrices sont toutes parallèles (relation (E.11)). Ces situations sont exclues pour le moment, la troisième composante de $\tilde{S}(\beta_{1, \dots, n})$, notée $\tilde{s}_3(\beta_{1, \dots, n})$, n'est donc jamais nulle. \triangleleft

La relation (E.16) conduit par conséquent à une et une seule solution pour $(\zeta_x, \zeta_y)^T$ précisément celle donnée par $\kappa = \frac{1}{\tilde{s}_3(\beta_{1, \dots, n})}$.

Expression de σ lorsque $\beta_1 \neq \frac{\pi}{2}$

Supposons pour le moment que $\beta_1 \neq \frac{\pi}{2}$. Nous déduisons alors de la première ligne de (E.14) que

$$\bar{\zeta}_y = \tan \beta_1 \bar{\zeta}_x \quad (\text{E.18})$$

En reportant (E.18) dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de (E.14), nous montrons que

$$\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) \tilde{\zeta}_x = l_i \sin \beta_i \cos \beta_1 \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.19})$$

puis, en prémultipliant (E.19) par $\tan \beta_1$ et en utilisant encore une fois (E.18), nous obtenons que

$$\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) \tilde{\zeta}_y = l_i \sin \beta_i \sin \beta_1 \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.20})$$

En combinant (E.19) et (E.20), nous prouvons finalement que

$$\sin^2(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) (\tilde{\zeta}_x^2 + \tilde{\zeta}_y^2) = \sin^2(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) \frac{1}{\sigma^2} = l_i^2 \sin^2 \beta_i \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.21})$$

(le *CIR* n'étant pas confondu avec S_1 , puisque cette orientation des roues directrices appartient à \mathcal{O}_s , nous pouvons bien écrire $\frac{1}{\sigma}$).

Avant d'aller plus loin, nous identifions les orientations des roues directrices β_{1,\dots,n^d} appartenant à \mathcal{O}_{ns} , pour lesquelles la $i^{\text{ème}}$ $2 \leq i \leq n^d$ composante β_i est nulle modulo π . Au vu de la définition de β donnée page 15, $\beta_i = 0$ traduit que la droite Δ_i passe par P , c'est-à-dire par S_1 , compte tenu du choix que nous avons fait pour le repère $[P, \vec{i}, \vec{j}]$. Il nous faut distinguer 2 cas

$n^d = 2$ ou $n^d \geq 3$ avec S_i alignés 2 possibilités encore

soit il existe $\beta_{j, j \neq i} \neq 0 [\pi]$. Dans ce cas, β_{1,\dots,n^d} est associée à un *CIR* confondu avec S_j ,

soit $\beta_i = 0 \forall i \in [1, n^d]$. Dans ce second cas, β_{1,\dots,n^d} correspond à la situation où toutes les droites Δ_i sont superposées.

Dans les 2 cas, $\beta_{1,\dots,n^d} \notin \mathcal{O}_{ns}$.

$n^d \geq 3$ avec S_i non alignés toujours 2 possibilités

soit $\beta_1 \neq \alpha_i [\pi]$ dans ce cas, l'intersection entre Δ_1 et Δ_i se limite à S_1 . Ces orientations des roues directrices sont donc, Proposition 2.13, associées à un *CIR* confondu avec S_i ; elles appartiennent par conséquent à \mathcal{O}_s .

soit $\beta_1 = \alpha_i [\pi]$ dans ce second cas, Δ_1 et Δ_i sont superposées. Aussi, le *CIR* est a priori n'importe quel point appartenant à ces 2 droites (toujours Proposition 2.13); sa position est déterminée par l'orientation des autres roues directrices.

si $\beta_2 = \dots = \beta_{n^d} = 0 [\pi]$, alors le *CIR* est placé en S_1 , β_{1,\dots,n^d} appartient une nouvelle fois à \mathcal{O}_s ,

dans le cas contraire, $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$.

En conclusion

$$\left. \beta_{1, \dots, n^d} \in \mathcal{O}_{n^d} \right\} \iff \begin{cases} n^d = 2 \text{ ou } n^d \geq 3 \text{ avec } S_i \text{ alignés} \\ \text{il n'existe pas de tels } \beta_{1, \dots, n^d} \\ n^d \geq 3 \text{ avec } S_i \text{ non alignés} \\ \beta_{1, \dots, n^d} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \star & \star & 0 & \star & \star \\ 1 & & & i & & \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

Ignorons pour le moment les orientations β_{1, \dots, n^d} données par (E.22). Alors, au vu de (E.21), nous pouvons écrire

$$\sigma^2 = \frac{\sin^2(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{l_i^2 \sin^2 \beta_i} \quad 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.23})$$

Un raisonnement simple permet de préciser le signe de σ au vu de la définition de σ donnée à la Proposition 2.20, nous avons

$$\text{Lorsque } \beta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\zeta_x) \quad (\text{E.24})$$

Or, la relation (E.19) nous indique que

$$\text{Lorsque } \beta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{sign}(\zeta_x) = \text{sign}\left(\frac{\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{l_i \sin \beta_i}\right) \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.25})$$

En reportant (E.24) et (E.25) dans (E.23), nous obtenons $n^d - 1$ expressions possibles pour σ

$$\sigma = \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{l_i \sin \beta_i} \quad 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.26})$$

Si $n^d - 1$ fractions sont identiques, alors on obtient encore cette même fraction en sommant les $n^d - 1$ numérateurs et les $n^d - 1$ dénominateurs. Il est même possible de pondérer cette somme. Aussi, soit $f_i(\beta_{1, \dots, n^d})$, $n^d - 1$ fonctions C^∞ n'étant pas nulles simultanément. Au vu de (E.26), nous pouvons encore exprimer σ comme :

$$\sigma = \frac{\sum_{i=2}^{n^d} f_i(\beta_{1, \dots, n^d}) \sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{\sum_{i=2}^{n^d} f_i(\beta_{1, \dots, n^d}) l_i \sin \beta_i} \quad (\text{E.27})$$

Pour tout $\beta_{1, \dots, n^d} \in \mathcal{O}_{n^d}$, il est impossible, voir relation (E.22), que $\beta_2 = \dots = \beta_{n^d} = 0 [\pi]$. Par conséquent, un choix possible pour $f_i(\beta_{1, \dots, n^d})$ est

$$f_i(\beta_{1, \dots, n^d}) = \sin \beta_i \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.28})$$

En reportant (E.28) dans (E.27), nous obtenons l'expression (E.10) proposée par la Proposition 2.21

Revenons maintenant par la difficulté introduite par les orientations β_{1, \dots, n^d} données par (E.22). En reportant (E.22) dans (E.26), nous obtenons l'indéterminée $\sigma = \frac{0}{0}$. Donc,

même pour ces orientations β_{1,\dots,n^d} , on peut faire apparaître le terme (E.26) dans la somme (E.27); on ne fait apparaître qu'un zéro dans la somme du numérateur et dans celle du dénominateur. Et, puisqu'il existe au moins un angle $\beta_{1,2 \leq i \leq n^d} \neq 0 \pmod{\pi}$ (cf relation (E.22)), la somme (E.27) fournit la valeur correcte de σ

A ce stade de la preuve, nous avons prouvé la relation (E.10) pour toutes les $\beta_{1,\dots,n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$, excepté celles pour lesquelles les roues sont toutes parallèles et celles présentant $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Nous montrons maintenant que la relation (E.10) reste valide dans ces 2 derniers cas.

Expression de σ lorsque $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Dans ce cas, au vu de la première ligne de (E.14), nous obtenons que $\zeta_x = 0$. On déduit alors de la $i^{\text{ème}}$ ligne de (E.14) que

$$\cos^2(\alpha_i + \beta_i) \zeta_y^2 = \cos^2(\alpha_i + \beta_i) \frac{1}{\sigma^2} = l_i^2 \sin^2 \beta_i, \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d$$

qui peut encore être ré-écrite, puisque $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\sin^2(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) \zeta_y^2 = \sin^2(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) \frac{1}{\sigma^2} = l_i^2 \sin^2 \beta_i, \quad \forall i, 2 \leq i \leq n^d \quad (\text{E.29})$$

Les relations (E.29) et (E.21) sont identiques. En reprenant alors les calculs précédents, nous montrons que la relation (E.10) reste valide lorsque $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Cas où les roues directrices sont toutes parallèles

En reportant (E.11) dans (E.10), on obtient que $\sigma = 0$, ce qui est la valeur attendue lorsque le mouvement instantané est une translation (voir définition de σ à la Proposition 2.20). La relation (E.10) est par conséquent valide également dans ce dernier cas de figure. Cela termine la preuve de la Proposition 2.21 \triangleleft

E.1.3 Preuve de la relation 2.61

Dans cette section, nous donnons la preuve de la relation suivante, citée à la section 2.4, page 68

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\beta}_i \ (2 \leq i \leq n^d) &= \frac{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) - \cos \beta_i \frac{\beta_1}{\sigma_i}} \eta_2 + \frac{\sin \beta_i}{\cos(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) - \cos \beta_i \frac{\beta_1}{\sigma_i}} \frac{\eta_3}{\sigma_i} \end{cases} \quad (\text{E.30})$$

Preuve : La preuve de la première ligne de (E.30) est triviale au vu de la définition de η_2 (relation (2.60)).

Pour prouver la seconde ligne de (E.30), considérons le modèle cinématique réduit d'un robot de la classe \mathcal{R}_1^1 donné à la section 2.4. Pour toute orientation β_{1,\dots,n^d} des roues directrices appartenant à \mathcal{O}_{ns} , ce modèle (système (2.67)) assure que les possibilités d'évolution du vecteur ξ sont décrites par

$$\dot{\xi} = R^{-1}(\theta) \tilde{S}(\beta_1, \sigma) \eta_1 \quad (\text{E.31})$$

avec

$$\tilde{S}(\beta_1, \sigma) = (\sin \beta_1, -\cos \beta_1, \sigma)^T \quad (\text{E.32})$$

En reportant (E.31) dans l'équation matricielle des contraintes données à la Proposition 2.12, nous en déduisons que

$$\forall \beta_{1, \dots, n^{di}} \in \mathcal{O}_{ns} \quad A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{di}}) \tilde{S}(\beta_1, \sigma) = 0 \quad (\text{E.33})$$

Nous utilisons ci-dessous les lignes 2 à n^{di} de la relation (E.33). Au vu de l'expression de $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{di}})$ donnée page 29, de (E.32) et de (2.56), celles-ci s'écrivent

$$\forall \beta_{1, \dots, n^{di}} \in \mathcal{O}_{ns} \quad \sin(\beta_1 - \alpha_i - \beta_i) + \sin \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i} = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, n^{di}\} \quad (\text{E.34})$$

Lors d'un déplacement du robot, $\beta_{1, \dots, n^{di}}$ reste dans \mathcal{O}_{ns} . En effet, le modèle (2.67) étant singulier pour $\beta_{1, \dots, n^{di}} \in \mathcal{O}_s$, toute loi de commande construite sur ce modèle doit éviter ces orientations singulières des roues directrices. Par conséquent, il découle de (E.33) que

$$\text{Lors du déplacement du robot} \quad \frac{d}{dt} (A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{di}}) \tilde{S}(\beta_1, \sigma)) = 0 \quad (\text{E.35})$$

En reportant la forme développée (E.34) de $A_{31}(\beta_{1, \dots, n^{di}}) \tilde{S}(\beta_1, \sigma)$ dans (E.35), nous obtenons finalement que

$$\left(\cos \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i} - \cos(\beta_1 - \alpha_i - \beta_i) \right) \dot{\beta}_i + \cos(\beta_1 - \alpha_i - \beta_i) \dot{\beta}_1 + \frac{\sin \beta_i}{\sigma_i} \dot{\sigma} = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, n^{di}\} \quad (\text{E.36})$$

La relation (E.30) est alors clairement établie si nous montrons le résultat suivant

$$\forall \beta_{1, \dots, n^{di}} \in \mathcal{O}_{ns} \quad \cos \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i} - \cos(\beta_1 - \alpha_i - \beta_i) \neq 0 \quad (\text{E.37})$$

Pour prouver le résultat (E.37), nous envisageons successivement le cas où les roues directrices sont toutes parallèles, puis le cas où elles ne le sont pas.

Lorsque les roues directrices sont toutes parallèles

le vecteur $\beta_{1, \dots, n^{di}}$ se présente sous la forme $(\beta_1, -\alpha_2 + \beta_1, \dots, -\alpha_{n^{di}} + \beta_1)^T$ (relation (E.11)),

la courbure algébrique instantanée σ est nulle (cf. Proposition 2.20).

En reportant ces 2 caractéristiques dans (E.37), nous en déduisons que

$$\cos \beta_i \frac{\sigma}{\sigma_i} - \cos(\beta_1 - \alpha_i - \beta_i) = 1 \neq 0$$

La relation (E.37) est toujours satisfaite lorsque les roues directrices sont toutes parallèles.

Lorsque les roues directrices ne sont pas toutes parallèles, nous avons montré à la section précédente (relation (E.26)) que, pour tout $\beta_{1, \dots, n^{di}} \in \mathcal{O}_{ns}$, si $\beta_1 \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors pour toute roue directrice i , $2 \leq i \leq n^{di}$

soit $\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) = \sin \beta_i = 0 \ [\pi]$,

$$\text{soit } \sigma = \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{l_i \sin \beta_i}$$

Ce résultat s'étend en fait au cas $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$ au vu de (E.29). Considérons successivement les 2 possibilités.

Supposons tout d'abord que l'orientation de la roue directrice $i \ 2 \leq i \leq n^d$ est telle que

$$\begin{cases} \sin \beta_i = 0 \\ \sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.38})$$

Les orientations $\beta_1, \dots, \beta_{n^d}$ vérifiant (E.38) peuvent être caractérisées très facilement. En effet, on déduit immédiatement de (E.38) que

$$\begin{cases} \beta_i = 0 \ [\pi] \\ \beta_i = \alpha_i \ [\pi] \end{cases} \quad (\text{E.39})$$

Au vu de la définition de l'angle β donné page 15, l'orientation des roues 1 et $i \ 2 \leq i \leq n^d$ est telle que Δ_1 et Δ_i sont superposées. Le CIR associé à un $\beta_1, \dots, \beta_{n^d} \in \mathcal{O}_{ns}$ vérifiant (E.38) appartient donc à $(S_1 S_i)$.

Reportons maintenant (E.38) dans la relation (E.37). On en déduit immédiatement que cette dernière n'est pas satisfaite si

$$1 - l_i \sigma = 0 \iff \sigma = \frac{1}{l_i} \quad (\text{E.40})$$

La seule orientation des roues directrices dont le CIR associé appartient à $(S_1 S_i)$, et qui vérifie (E.40), est clairement celle pour laquelle le CIR est confondu avec S_i . Cette orientation des roues directrices n'appartient pas à \mathcal{O}_{ns} .

Supposons maintenant que l'orientation de la roue directrice $i \ 2 \leq i \leq n^d$ ne vérifie pas (E.38). Dans ce cas

$$\sigma = \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_1)}{l_i \sin \beta_i} \quad (\text{E.41})$$

En reportant (E.41) dans la relation (E.37), nous en déduisons immédiatement que cette dernière n'est pas satisfaite si

$$-l_i \sin(\alpha_i - \beta_1) = 0 \iff \beta_1 = \alpha_i \ [\pi] \quad (\text{E.42})$$

c'est-à-dire, au vu de la définition de β donnée page 15, si $\Delta_1 = (S_1 S_i)$. β_i ne pouvant plus être égal à 0 $[\pi]$ (car alors combiné avec (E.42), nous retrouverions les relations (E.38). Or nous supposons qu'elles ne sont pas vérifiées), Δ_1 et Δ_i sont sécantes en S_i , qui est donc CIR, Proposition 2.13. Ces orientations des roues directrices n'appartiennent pas à \mathcal{O}_{ns} .

Les développements précédents établissent la relation (E.37), et donc la relation (E.30) au vu de (E.36). \triangleleft

E.2 Résultats techniques concernant la commande des robots \mathcal{R}_2^1

E.2.1 Calcul de la matrice Q^2 définie par (4.30)

Dans cette section, nous montrons que compte tenu de la structure très simple de la matrice \mathcal{A} (relation (4.22)), la matrice Q^2 définie par (4.30) peut être obtenue sans calcul d'exponentielle de matrice, et sans intégration matricielle.

Nous introduisons tout d'abord les notations suivantes

Dans le cas des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 , le vecteur des fonctions de sortie s'écrit (relation (4.13))

$$\phi = (x, y, \frac{\theta}{\sigma_1})$$

Le calcul de la matrice Q^2 que nous proposons ici peut cependant être utilisé pour un système quelconque. Aussi nous noterons plus généralement

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

Nous avons juste conservé la dimension du vecteur ϕ afin de ne pas alourdir la présentation. La méthode exposée ici pour calculer Q^2 peut néanmoins être utilisée pour un système comportant n^6 fonctions de sortie.

Les matrices H_1 et H_2 , introduites dans (4.21), seront développées comme suit

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{2,3} \end{pmatrix} \quad (\text{E.43})$$

Enfin, en reportant (E.43) dans (4.22), nous obtenons que la $i^{\text{ème}}$ fonction de sortie ϕ_i obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{\phi}_i = -h_{1,i}\dot{\phi}_i - h_{2,i}\dot{\phi}_i \quad (\text{E.44})$$

Nous noterons $r_{i,1}$ et $r_{i,2}$ les racines de l'équation (E.44), i.e.

$$r_{i,1} \text{ et } r_{i,2} \text{ sont les 2 racines de l'équation } r^2 + h_{1,i}r + h_{2,i} = 0 \quad (\text{E.45})$$

Ces 2 nombres caractérisent la dynamique propre à la fonction de sortie ϕ_i . Puisqu'ils ne dépendent que de $h_{1,i}$ et $h_{2,i}$, ils peuvent être ajustés par l'utilisateur à n'importe quelle valeur, en fonction des besoins. Concernant ce réglage, nous ferons juste l'Hypothèse suivante, très peu restrictive

Hypothèse E.1 Choix de la dynamique des fonctions de sortie

Nous supposons que la dynamique des fonctions de sortie ϕ_i a été choisie telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad r_{i,1} \text{ et } r_{i,2} \text{ ne sont pas des réels identiques} \quad \square$$

Afin de calculer Q^2 , nous nous appuyons sur le résultat suivant

Proposition E.1 Diagonalisation de \mathcal{A}

Sous l'Hypothèse E.1, la matrice \mathcal{A} , donnée par (4.22), est diagonalisable dans \mathbb{C} . \square

Preuve : Pour montrer que la matrice \mathcal{A} , de dimension (6×6) , est diagonalisable sur \mathbb{C} , il suffit de montrer que la somme de la dimension de tous les espaces propres de \mathcal{A} est égale à 6.

Il est immédiat que $r_{i,1}$ et $r_{i,2}$ $i \in \{1, 2, 3\}$ sont les 6 valeurs propres de \mathcal{A} . Cela peut être prouvé par exemple par un calcul direct. Le polynôme caractéristique de \mathcal{A} , noté $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda)$, s'écrit au vu de (4.22) et (E.43) comme le déterminant suivant

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -h_{1,1} & 0 & 0 & -h_{2,1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -h_{1,2} & 0 & 0 & -h_{2,2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -h_{1,3} & 0 & 0 & -h_{2,3} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{E.46})$$

En ré-écrivant les colonnes de ce déterminant dans l'ordre *col. 1 col. 4 col. 2 col. 5 col. 3 col. 6*, et les lignes dans l'ordre *ligne 1 ligne 4 ligne 2 - ligne 5 ligne 3 ligne 6*, $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ s'exprime encore comme

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{1,1} & -h_{2,1} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_{1,2} & -h_{2,2} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{1,3} & -h_{2,3} - \lambda \end{vmatrix}$$

Ce déterminant peut alors être développé très facilement, et l'on obtient

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^3 (\lambda^2 + h_{2,i}\lambda + h_{1,i})$$

Les $r_{i,1}$ et $r_{i,2}$ $i \in \{1, 2, 3\}$ sont donc bien les valeurs propres de \mathcal{A} .

L'espace propre associé avec la valeur propre $r_{i,j}$ $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$ est par définition l'ensemble des vecteurs $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_5, \tilde{\Phi}_6)^T$ satisfaisant la relation

$$\mathcal{A}\tilde{\Phi} = r_{i,j}\tilde{\Phi} \quad (\text{E.47})$$

Compte tenu de l'expression de \mathcal{A} , donnée par (4.22), la relation (E.47) peut être développée comme

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_4 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_5 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_2 \\ \tilde{\Phi}_6 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_3 \\ -h_{1,1}\tilde{\Phi}_1 - h_{2,1}\tilde{\Phi}_4 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_4 \\ -h_{1,2}\tilde{\Phi}_2 - h_{2,2}\tilde{\Phi}_5 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_5 \\ -h_{1,3}\tilde{\Phi}_3 - h_{2,3}\tilde{\Phi}_6 = r_{i,j}\tilde{\Phi}_6 \end{cases} \quad (\text{E.48})$$

Puisque $r_{i,j}$ est la racine de l'équation $\lambda^2 + h_{2,i}\lambda + h_{1,i}$ (relation (E.45)), nous en déduisons immédiatement que les solutions Φ du système (E.48) sont toutes colinéaires au vecteur dont les composantes sont données par

$$\Phi_i = 1 \quad \bar{\Phi}_{i+3} = r_{i,j} \quad \bar{\Phi}_{k \neq \{i,i+3\}} = 0 \quad (\text{E.49})$$

En faisant varier i et j dans respectivement $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2\}$, nous obtenons 6 vecteurs propres se présentant tous sous la forme (E.49). La matrice de passage vers les espaces propres s'écrit par conséquent comme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ r_{1,1} & r_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,1} & r_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{3,1} & r_{3,2} \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que la matrice T est de rang plein si et seulement si $r_{i,1} \neq r_{i,2} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Compte tenu de l'Hypothèse E.1, T est toujours de rang plein, la matrice A est par conséquent diagonalisable sur \mathbb{C} .

Dans la suite de cette section, nous aurons besoin de l'expression de T^{-1} . Un calcul sans difficulté particulière montre que

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{r_{1,2}}{r_{1,1}-r_{1,2}} & 0 & 0 & \frac{1}{r_{1,1}-r_{1,2}} & 0 & 0 \\ \frac{r_{1,1}}{r_{1,1}-r_{1,2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{1,1}-r_{1,2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_{2,2}}{r_{2,1}-r_{2,2}} & 0 & 0 & \frac{1}{r_{2,1}-r_{2,2}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{2,1}}{r_{2,1}-r_{2,2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{2,1}-r_{2,2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_{3,2}}{r_{3,1}-r_{3,2}} & 0 & 0 & \frac{1}{r_{3,1}-r_{3,2}} \\ 0 & 0 & \frac{r_{3,1}}{r_{3,1}-r_{3,2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{3,1}-r_{3,2}} \end{pmatrix}$$

Nous noterons \mathcal{D} , la forme diagonale associée à \mathcal{A} , i.e.

$$T^{-1}AT = \mathcal{D} = \text{diag}(r_{1,1}, r_{2,1}, r_{1,2}, r_{2,2}, r_{3,1}, r_{3,2}) \quad (\text{E.50})$$

En utilisant \mathcal{D} , le calcul de $e^{\mathcal{A}}$ devient immédiat. En effet, au vu de (E.50), nous avons

$$e^{\mathcal{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T\mathcal{D}T^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T\mathcal{D}^i T^{-1}}{i!} = T e^{\mathcal{D}} T^{-1} \quad (\text{E.51})$$

avec $e^{\mathcal{D}}$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $[e^{\mathcal{D}}]_{i,i} = e^{d_{i,i}}$. En reportant (E.51) dans (4.30), nous obtenons pour Q^2 l'expression .

$$Q^2 = (T^{-1})^T \int_0^{\infty} e^{s\mathcal{D}} T^T Q T e^{s\mathcal{D}} ds T^{-1} \quad (\text{E.52})$$

Notons \bar{Q} , la matrice positive définie symétrique définie par

$$\bar{Q} = T^T Q T$$

et $\bar{q}_{i,j}$, son élément (i, j) . Un calcul simple montre que

$$[e^{sD} T^T Q T e^{sD}]_{(i,j)} = e^{s(d_{i,i} + d_{j,j})} q_{i,j} \quad (\text{E.53})$$

En reportant finalement (E.53) dans (E.52), nous obtenons qu'une expression explicite pour la matrice Q^2 est

$$Q^2 = (T^{-1})^T \left[-\frac{q_{i,j}}{d_{i,i} + d_{j,j}} \right]_{\substack{1 \leq i, j \leq 6 \\ i \neq j}} T^{-1} \quad (\text{E.54})$$

E.2.2 Calcul de la fonction $M(t)$

Dans cette section, nous détaillons le calcul de la fonction $M(t)$, définie par (4.23), pour le cas des robots de la classe \mathcal{R}_2^1 . Plus précisément, nous montrons que

pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 ne comportant que $n^{\text{di}} = 2$ roues directrices ou $n^{\text{di}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés, l'expression de la fonction $M(t)$ définie par (4.23) est donnée par la relation (4.38),

pour les robots de la classe \mathcal{R}_2^1 équipés de $n^{\text{di}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, si l'on simplifie les calculs en introduisant la contrainte supplémentaire (4.37), alors l'expression de la fonction $M(t)$ définie par (4.23) est donnée par la relation (4.39).

Pour prouver ces relations, nous calculons tout d'abord la distance entre $\Phi_{\text{ref}} t$ et la singularité $\eta_1 = 0$ (Hypothèse (b) du Théorème 4.1), puis la distance entre $\Phi_{\text{ref}} t$ et ${}^3\mathcal{O}_s$ ou ${}^2\mathcal{O}_s$, et enfin le minimum des 2 distances ainsi obtenu.

Afin d'alléger les équations, nous repérerons désormais la trajectoire de référence par $\Phi_r(t)$ au lieu de $\Phi_{\text{ref}}(t)$.

Distance entre $\Phi_r(t)$ et la singularité $\eta_1 = 0$

Nous notons $\mathcal{X}_e^{\eta_1}$ l'ensemble des valeurs singulières du vecteur d'état étendu χ_e au vu de l'Hypothèse (b) du Théorème 4.1. Au regard de (4.17), l'ensemble $\mathcal{X}_e^{\eta_1}$ présente une expression très simple :

$$\mathcal{X}_e^{\eta_1} = \{ \chi_e = (x, y, \theta, \beta_1, \sigma, 0)^T \quad \text{avec} \quad x, y, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \theta, \beta_1 \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \}$$

Soit $M_1(t)$, la distance entre $\Phi_r(t)$ et $\mathcal{X}_e^{\eta_1}$. Cette fonction est définie par

$$M_1(t) = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\eta_1}} \|\tilde{\Phi}(t)\| = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\eta_1}} \|\Phi_r(t) - \Psi(\chi_e)\| \quad (\text{E.55})$$

En reportant (4.19) dans (E.55), nous obtenons

$$M_1(t) = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\eta_1}} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{\theta}^2 + \sin^2(\theta_r + \beta_{1,r})\eta_{1,r}^2 + \cos^2(\theta_r + \beta_{1,r})\eta_{1,r}^2 + \sigma_r^2\eta_{1,r}^2}$$

ou encore, en utilisant les relations trigonométriques

$$M_1(t) = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\sigma_1}} \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{\theta}^2 + (1 + \sigma_1^2) \eta_{1,r}^2} \quad (\text{E.56})$$

Le minimum du terme de droite dans (E.56) est très simple à calculer. Nous avons donc finalement

$$M_1(t) = |\eta_{1,r}(t)| \sqrt{1 + \sigma_1^2(t)} \quad (\text{E.57})$$

Cas $n^{dt} \geq 3$ - S_i non alignés : distance entre $\Phi_r(t)$ la singularité $|\sigma| \geq \sigma_l$

Nous notons \mathcal{X}_e^{σ} l'ensemble des valeurs singulières du vecteur d'état étendu χ_e au vu de l'Hypothèse (a) du Théorème 4.1, lorsque le robot \mathcal{R}_2^1 considéré comporte $n^{dt} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés. Compte tenu de la contrainte supplémentaire (4.37) que nous avons introduite, l'ensemble \mathcal{X}_e^{σ} présente l'expression suivante

$$\mathcal{X}_e^{\sigma} = \{ \chi_e = (x, y, \theta, \beta_1, \sigma, \eta_1)^T \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}^{\pm*} \quad \theta, \beta_1 \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \quad |\sigma| \geq \sigma_l \}$$

De manière à pouvoir utiliser la loi de bouclage dynamique, nous devons supposer qu'à l'instant initial, nous avons $|\sigma(0)| < \sigma_l$. Cette loi de commande faisant ensuite varier la variable d'état σ de manière C^∞ , la relation $(|\sigma(t)| \neq \sigma_l \quad \forall t)$ garantit que $(|\sigma(t)| < \sigma_l \quad \forall t)$. Par conséquent, la distance $M_2^{\sigma}(t)$ entre $\Phi_r(t)$ et \mathcal{X}_e^{σ} s'exprime simplement comme

$$M_2^{\sigma}(t) = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\sigma}} \|\hat{\Phi}(t)\| = \min_{\chi_e \in \mathcal{X}_e^{\sigma}} \|\Phi_r(t) - \Psi(\chi_e)\| \quad (\text{E.58})$$

avec $\bar{\mathcal{X}}_e^{\sigma}$ la frontière de \mathcal{X}_e^{σ} i.e.

$$\bar{\mathcal{X}}_e^{\sigma} = \{ \chi_e = (x, y, \theta, \beta_1, \sigma, \eta_1)^T \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}^{\pm*} \quad \theta, \beta_1 \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \quad |\sigma| = \sigma_l \}$$

Afin d'alléger l'écriture des équations, nous utiliserons dans la suite de cette section les notations suivantes

$$s_{\beta_1} = \sin \beta_1 \quad c_{\beta_1} = \cos \beta_1 \quad (\text{E.59})$$

En reportant (4.19) dans (E.58), et en utilisant les notations (E.59), nous obtenons

$$M_2^{\sigma} = \min_{\chi_e \in \bar{\mathcal{X}}_e^{\sigma}} \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{\theta}^2 + (s_{\theta+\beta_1,r} \eta_{1,r} - s_{\theta+\beta_1} \eta_1)^2 + (c_{\theta+\beta_1,r} \eta_{1,r} - c_{\theta+\beta_1} \eta_1)^2 + \frac{(\sigma_r \eta_{1,r} - \sigma \eta_1)^2}{(\sigma_r \eta_{1,r} - \sigma \eta_1)^2}} \quad (\text{E.60})$$

La valeur minimale prise par le terme de droite dans (E.60) n'est cette fois plus du tout immédiate.

Introduisons la variable suivante, définie sur $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

$$\varpi = \theta + \alpha \quad (\text{E.61})$$

En reportant (E.61) dans (E.60), nous obtenons

$$M_2^s = \min_{\chi \in \mathcal{X}_s^*} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{\theta}^2 + (s_{\omega}, \eta_{1,r} - s_{\omega} \eta_1)^2 + (c_{\omega}, \eta_{1,r} - c_{\omega} \eta_1)^2 + (\sigma_r \eta_{1,r} - \sigma_r \eta_1)^2} \quad (\text{E.62})$$

\tilde{x} , \tilde{y} et $\tilde{\theta}$ n'interviennent dans (E.62) que comme des termes quadratiques indépendants. Le minimum du terme de droite de (E.62) est donc atteint en mettant \tilde{x} , \tilde{y} et $\tilde{\theta}$ à zéro. M_2^s peut donc encore s'écrire

$$M_2^s = \min_{(\omega \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \eta_1 \in \mathbb{R}^{\pm})} \sqrt{(s_{\omega}, \eta_{1,r} - s_{\omega} \eta_1)^2 + (c_{\omega}, \eta_{1,r} - c_{\omega} \eta_1)^2 + (\sigma_r \eta_{1,r} \pm \sigma_r \eta_1)^2} \quad (\text{E.63})$$

Puisque la trajectoire de référence ne comporte pas de singularité, la variable $\eta_{1,r}(t)$ présente un signe constant (hypothèse (b) du Théorème 4.1). De plus, en choisissant $M(t) = M_1(t)$ dans la relation (4.25), nous assurons (paragraphe précédant la relation (E.57)) que η_1 présente également un signe constant. Par conséquent, il existe une fonction scalaire strictement positive $\kappa(t)$ telle que

$$\eta_1(t) = \kappa(t) \eta_{1,r}(t) \quad (\text{E.64})$$

En reportant (E.64) dans (E.63) et en exploitant les relations trigonométriques, M_2^s peut finalement être présenté sous la forme

$$M_2^s = \min_{(\tilde{\omega} \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \kappa \in \mathbb{R}^{++})} |\eta_{1,r}| \sqrt{(1 + \sigma_r^2) - 2\kappa(\cos \tilde{\omega} \pm \sigma_r \sigma_l) + \kappa^2(1 + \sigma_l^2)} \quad (\text{E.65})$$

Au vu de (E.65), le calcul de M_2^s propose le problème suivant : calculer le minimum de la fonction $\lambda(\tilde{\omega}, \kappa, s)$

$$\lambda(\tilde{\omega}, \kappa, s) = (1 + \sigma_r^2) - 2\kappa(\cos \tilde{\omega} + s\sigma_r \sigma_l) + \kappa^2(1 + \sigma_l^2) \quad (\text{E.66})$$

avec $\tilde{\omega}$, κ et s variant respectivement dans $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, \mathbb{R}^{++} et $\{1, -1\}$. La fonction $\lambda(\tilde{\omega}, \kappa, s)$ peut être vue comme une famille de paraboles pour la variable κ , paramétrées par les variables $\tilde{\omega}$ et s . Puisque κ est nécessairement positif, le minimum de l'une de ces paraboles, associé à un couple $(\tilde{\omega}, s)$, est atteint lorsque $\kappa = \kappa_{\min}$, avec

$$\kappa_{\min}(\tilde{\omega}, s) = \begin{cases} \frac{\cos \tilde{\omega} + s\sigma_r \sigma_l}{1 + \sigma_l^2} & \text{quand } \cos \tilde{\omega} + s\sigma_r \sigma_l > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.67})$$

En reportant (E.67) dans (E.66), nous en déduisons que la valeur minimale pour une parabole paramétrée par $(\tilde{\omega}, s)$ est

$$\lambda_{\min}(\tilde{\omega}, s) = \begin{cases} \frac{(1 + \sigma_r^2)(1 + \sigma_l^2) - (\cos \tilde{\omega} + s\sigma_r \sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2} & \text{si } (\tilde{\omega}, s) \text{ est associé avec un } \kappa_{\min} > 0 \\ 1 + \sigma_r^2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.68})$$

Pour obtenir maintenant le minimum minimum de $\lambda(\tilde{\omega}, \kappa, s)$ (noté $\lambda_{\min, \min}$), nous devons déterminer le couple $(\tilde{\omega}, s)$ pour lequel $\lambda_{\min}(\tilde{\omega}, s)$ est minimum, i.e.

$$\lambda_{\min, \min} = \min_{\tilde{\omega}, s} \lambda_{\min}(\tilde{\omega}, s) \quad (\text{E.69})$$

Considérons tout d'abord les couples $(\tilde{\omega}, s)$ associés avec un $\kappa_{\min}(\tilde{\omega}, s)$ strictement positif. Compte tenu des propriétés de la fonction \cos , la relation suivante est toujours vérifiée

$$|\cos \tilde{\omega} + s\sigma_r\sigma_l| \leq 1 + \text{sign}(\sigma_r)\sigma_r\sigma_l \quad (\text{E.70})$$

En reportant (E.70) dans la ligne supérieure de (E.68), on montre facilement la minoration suivante

$$\begin{aligned} &\text{Pour tous les couples } (\tilde{\omega}, s) \text{ associés avec un } \kappa_{\min}(\tilde{\omega}, s) > 0 \\ &\lambda_{\min}(\tilde{\omega}, s) \geq \frac{(\text{sign}(\sigma_r)\sigma_r - \sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2} \end{aligned} \quad (\text{E.71})$$

Pour les couples $(\tilde{\omega}, s)$ associés avec un $\kappa_{\min}(\tilde{\omega}, s)$ négatif, la relation (E.68) fournit directement

$$\text{Pour tous les couples } (\tilde{\omega}, s) \text{ associés avec un } \kappa_{\min}(\tilde{\omega}, s) \leq 0 \quad \lambda_{\min}(\tilde{\omega}, s) = 1 + \sigma_r^2 \quad (\text{E.72})$$

En reportant (E.71) et (E.72) dans (E.69), nous obtenons .

$$\lambda_{\min, \min} = \min \left(\frac{(\text{sign}(\sigma_r)\sigma_r - \sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2}, 1 + \sigma_r^2 \right) \quad (\text{E.73})$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{(\text{sign}(\sigma_r)\sigma_r - \sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2} - (1 + \sigma_r^2) = -\frac{(1 + \text{sign}(\sigma_r)\sigma_r\sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2} \leq 0 \quad (\text{E.74})$$

Les relations (E.73) et (E.74) montrent finalement que

$$\lambda_{\min, \min} = \frac{(\text{sign}(\sigma_r)\sigma_r - \sigma_l)^2}{1 + \sigma_l^2}$$

d'où l'on déduit au vu de (E.65) que

$$M_2^\sigma = |\eta_{1,r}(t)| \frac{|\text{sign}(\sigma_r(t))\sigma_r(t) - \sigma_l|}{\sqrt{1 + \sigma_l^2}} \quad (\text{E.75})$$

Cas $n^{di} = 2$ ou $n^{di} \geq 3$ - S, alignés : distance entre $\Phi_r(t)$ les singularités ${}^2\mathcal{O}_s$

Nous notons $\mathcal{X}_e^{\beta_1}$ l'ensemble des valeurs singulières du vecteur d'état étendu χ_e au vu de l'Hypothèse (a) du Théorème 4.1, lorsque le robot \mathcal{R}_2^1 considéré comporte $n^{di} = 2$ roues directrices ou $n^{di} \geq 3$ mais dont les centres S_i sont alignés. Au regard de (2.74), l'ensemble $\mathcal{X}_e^{\beta_1}$ présente l'expression suivante

$$\mathcal{X}_e^{\beta_1} = \{ \chi_e = (x, y, \theta, \mathbf{0} [\boldsymbol{\pi}], \sigma, \eta_1)^T \quad \text{with} \quad x, y, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}^{2*} \}$$

(nous ne prenons pas en compte les éléments $(*, \pm\infty)$ de ${}^2\mathcal{O}_s$ car la distance à ces singularités est de façon évidente toujours infinie).

Nous notons $M_2^{\beta_1}$ la distance entre $\Phi_r(t)$ et $\mathcal{X}_r^{\beta_1}$. Cette fonction est définie par

$$M_2^{\beta_1}(t) = \min_{\chi_c \in \mathcal{X}_c^{\beta_1}} \|\tilde{\Phi}(t)\| = \min_{\chi_c \in \mathcal{X}_c^{\beta_1}} \|\Phi_r(t) - \Phi(\chi_c)\| \quad (\text{E.76})$$

En utilisant les mêmes arguments que lors du calcul de $M_2^{\sigma}(t)$, la relation (E.76) peut être présentée sous la forme

$$M_2^{\beta_1} = \min_{(\sigma \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}^{++})} |\eta_{1,r}| \sqrt{(1 + \sigma^2) - 2\kappa(\pm \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma) + \kappa^2(1 + \sigma^2)} \quad (\text{E.77})$$

où κ est la fonction définie par (E.64).

Au vu de (E.77), le calcul de $M_2^{\beta_1}$ propose le problème suivant : calculer le minimum de la fonction $\mu(\sigma, \kappa, s)$:

$$\mu(\sigma, \kappa, s) = (1 + \sigma^2) - 2\kappa(s \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma) + \kappa^2(1 + \sigma^2) \quad (\text{E.78})$$

avec σ , κ et s variant respectivement dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^{++} and $\{-1, 1\}$. La fonction $\mu(\sigma, \kappa, s)$, tout comme la fonction $\lambda(\tilde{\omega}, \kappa, s)$ que nous avons précédemment introduite lors du calcul de M_2^{σ} , peut être vue comme une famille de paraboles pour la variable κ , paramétrée cette fois par les variables σ et s . Puisque κ est nécessairement positif, le minimum de l'une de ces paraboles, associée à un couple (σ, s) , est atteint lorsque $\kappa = \kappa_{\min}$, avec :

$$\kappa_{\min}(\sigma, s) = \begin{cases} \frac{s \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma}{1 + \sigma^2} & \text{quand } s \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.79})$$

En reportant (E.79) dans (E.78), nous en déduisons que la valeur minimale pour une parabole paramétrée par (σ, s) est

$$\mu_{\min}(\sigma, s) = \begin{cases} \frac{(1 + \sigma^2)(1 + \sigma^2) - (s \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma)^2}{1 + \sigma^2} & \text{si } (\sigma, s) \text{ est associé avec } \kappa_{\min} > 0 \\ 1 + \sigma^2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.80})$$

Pour obtenir maintenant le minimum minimum de $\mu(\sigma, \kappa, s)$ (noté $\mu_{\min, \min}$), nous devons déterminer le couple (σ, s) pour lequel $\mu_{\min}(\sigma, s)$ est minimum, i.e. :

$$\mu_{\min, \min} = \min_{\sigma, s} \mu_{\min}(\sigma, s) \quad (\text{E.81})$$

Le calcul de $\mu_{\min, \min}$ présente plus de difficultés que celui de $\lambda_{\min, \min}$.

Considérons dans un premier temps les couples (σ, s) associés avec un $\kappa_{\min} > 0$. Compte tenu des propriétés de la fonction \sin , la relation suivante est toujours vérifiée

$$(s \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma)^2 \leq (\sin(\sigma_r \cos \beta_{1,r}) \cos \beta_{1,r} + \sigma_r \sigma)^2 \quad (\text{E.82})$$

En reportant (E.82) dans la ligne supérieure de (E.80), on montre facilement la minoration suivante

$$\mu_{\min}(\sigma, s) \geq \mu_{\min,1}(\sigma) = \frac{\sin^2 \beta_{1,r} + \sigma_r^2 - 2\text{sign}(\sigma_r \cos \beta_{1,r}) \cos \beta_{1,r} \sigma_r \sigma + \sigma^2}{1 + \sigma^2} > 0 \quad (\text{E.83})$$

Il nous faut maintenant, dernière étape, déterminer un minorant pour la fonction $\mu_{\min,1}(\sigma)$ apparaissant dans (E.83). Cette fonction peut encore être écrite comme

$$\mu_{\min,1}(\sigma) = \frac{\sin^2 \beta_{1,r} + \sigma_r^2 - 2\text{sign}(\sigma) |\sigma_r \cos \beta_{1,r}| \sigma + \sigma^2}{1 + \sigma^2} \quad (\text{E.84})$$

Supposons pour le moment que $\sigma \neq 0$. Le minimum de la fonction $\mu_{\min,1}(\sigma)$ peut alors être recherché en déterminant les valeurs de σ qui annulent la dérivée de cette fonction. Un calcul simple montre que

$$\text{si } \sigma > 0 \quad \frac{d}{d\sigma} \mu_{\min,1}(\sigma) = \frac{2(-|\sigma_r \cos \beta_{1,r}| + \sigma(-\sigma_r^2 + \cos^2 \beta_{1,r}) + \sigma^2 |\sigma_r \cos \beta_{1,r}|)}{(1 + \sigma^2)^2} \quad (\text{E.85})$$

$$\text{si } \sigma < 0 \quad \frac{d}{d\sigma} \mu_{\min,1}(\sigma) = \frac{2(|\sigma_r \cos \beta_{1,r}| + \sigma(-\sigma_r^2 + \cos^2 \beta_{1,r}) - \sigma^2 |\sigma_r \cos \beta_{1,r}|)}{(1 + \sigma^2)^2} \quad (\text{E.86})$$

Supposons provisoirement que $\sigma_r \cos \beta_{1,r} \neq 0$. Alors on montre facilement que les numérateurs de (E.85) et (E.86) n'acceptent qu'une racine présentant le bon signe. Plus précisément, ces racines sont

$$\text{si } \sigma > 0 \quad \sigma = \frac{|\sigma_r|}{|\cos \beta_{1,r}|} \quad (\text{E.87})$$

$$\text{si } \sigma < 0 \quad \sigma = -\frac{|\sigma_r|}{|\cos \beta_{1,r}|} \quad (\text{E.88})$$

Compte tenu du signe de $\frac{d}{d\sigma} \mu_{\min,1}(\sigma)$ de chaque côté de ces racines, nous en déduisons qu'elles correspondent bien à un minimum. Ce dernier, en reportant (E.87) ou (E.88) dans (E.84), est $\sin^2 \beta_{1,r}$.

Pour le moment, nous avons prouvé que

$$\text{Si } \sigma_r \cos \beta_{1,r} \neq 0 \quad \min_{\text{toutes les valeurs de } \sigma \text{ excepté } 0} (\mu_{\min,1}(\sigma)) = \sin^2 \beta_{1,r} \quad (\text{E.89})$$

En utilisant (E.84), on montre immédiatement que

$$\mu_{\min,1}(0) = \sigma_r^2 + \sin^2 \beta_{1,r} \geq \sin^2 \beta_{1,r}$$

la conclusion (E.89) peut donc être ré-écrite plus simplement

$$\text{Si } \sigma_r \cos \beta_{1,r} \neq 0 \quad \min_{\sigma} (\mu_{\min,1}(\sigma)) = \sin^2 \beta_{1,r} \quad (\text{E.90})$$

Enfin, on peut montrer directement à partir de (E.84) que

$$(\sigma_r \cos \beta_{1,r} = 0) \implies \min_{\sigma} \mu_{\min,1}(\sigma) = \sigma_r^2 + \sin^2 \beta_{1,r} \geq \sin^2 \beta_{1,r} \quad (\text{E.91})$$

Par conséquent, en reportant (E.91) dans (E.90), nous avons

$$\forall \sigma_r, \forall \cos \beta_{1,r} \quad \min_{\sigma \in \mathbb{R}} \mu_{\min,1}(\sigma) = \sin^2 \beta_{1,r} \quad (\text{E.92})$$

et donc, en reportant (E.92) dans (E.83)

$$\text{Pour tous les couples } (\sigma, s) \text{ associés avec un } \kappa_{\min}(\sigma, s) > 0 \quad \mu_{\min}(\sigma, s) \geq \sin^2 \beta_{1,r} \quad (\text{E.93})$$

Pour les couples (σ, s) associés avec un $\kappa_{\min}(\sigma, s)$ négatif, la relation (E.80) fournit directement

$$\text{Pour tous les couples } (\sigma, s) \text{ associés avec un } \kappa_{\min}(\hat{\omega}, s) \leq 0 \quad \mu_{\min}(\hat{\omega}, s) = 1 + \sigma_r^2 \quad (\text{E.94})$$

Aussi, en reportant (E.93) et (E.94) dans (E.81), nous obtenons

$$\mu_{\min, \min} = \min(\sin^2 \beta_{1,r}, 1 + \sigma_r^2) = \sin^2 \beta_{1,r}$$

et donc, au vu de (E.77) et (E.78)

$$M_2^{\beta_1} = |\eta_{1,r}(t) \sin \beta_{1,r}(t)| \quad (\text{E.95})$$

Distance entre $\Phi_{ref}(t)$ et l'ensemble des singularités La fonction $M(t)$, définie par (4.23), se déduit immédiatement des fonctions $M_1(t)$, $M_2^\sigma(t)$ et $M_2^{\beta_1}(t)$

pour les robots équipés de $n^{\text{dt}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i ne sont pas alignés, $M(t)$ est donnée par

$$M(t) = \min(M_1(t), M_2^\sigma(t))$$

Au vu de (E.57), (E.75) et (E.74), nous avons clairement

$$M(t) = M_2^\sigma(t) = |\eta_{1,r}(t)| \frac{|\text{sign}(\sigma_r(t))\sigma_r(t) - \sigma_l|}{\sqrt{1 + \sigma_l^2}} \quad (\text{E.96})$$

pour les robots équipés de $n^{\text{dt}} = 2$ roues directrices ou $n^{\text{dt}} \geq 3$ roues directrices dont les centres S_i sont alignés, $M(t)$ est donnée par

$$M(t) = \min(M_1(t), M_2^{\beta_1}(t))$$

Au vu de (E.57) et (E.95), nous avons clairement

$$M(t) = M_2^{\beta_1} = |\eta_{1,r}(t) \sin \beta_{1,r}(t)| \quad (\text{E.97})$$

Les relations (E.96) et (E.97) ont été utilisées au Chapitre 4.1 ce sont les relations (2.74) et (2.72).

Bibliographie

- [ABC91] B. d'Andréa-Novel, G. Bastin, and G. Campion. *"Modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robots"* In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 1030-1035, Sacramento, Avril 1991.
- [ABC92] B. d'Andréa-Novel, G. Bastin, and G. Campion. *"Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots"*. In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 2527-2532, Nice, Mai 1992.
- [ACB95a] B. d'Andréa-Novel, G. Campion, and G. Bastin. *"Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization"* International Journal of Robotics Research, 14(6), December 1995.
- [ACB95b] B. d'Andréa-Novel, G. Campion, and G. Bastin. *"Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints a singular perturbation approach"* International Journal of Robust & Nonlinear Control, 5:243-267 1995.
- [Ack92] J. Ackermann. *"Robust yaw damping of cars with front and rear wheel steering"* In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 2586-2590, Tucson, Décembre 1992.
- [Ack93] J. Ackermann. *"Robust nonlinear decoupling and yaw stabilization of 4WS cars"* In Proc. IFAC World congress, Sydney, Juillet 1993.
- [All94] A. Alloum. *"Modélisation et commande dynamique d'une automobile pour la sécurité de conduite"*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC), Mai 1994.
- [AMP95] E. Aranda-Bricaire, C.H. Moog, and J-B. Pomet. *"A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization"* IEEE Trans. on Automatic Control, 40(1):127-132, Janvier 1995.
- [AMS91] B. d'Andréa-Novel, P. Martin, and R. Sepulchre. *"Full linearization of a class of mechanical systems via dynamic state feedback"* In Proc. MTNS Symposium, Kobe, Juin 1991.
- [And88] B. d'Andréa-Novel. *"Commande non-linéaire des robots"* "Traité des nouvelles technologies série Automatique" Hermès, Paris, octobre 1988.

- [ASB⁺95] H. Asama, M. Sato, L. Bogoni, H. Kaetsu, A. Matsumoto, and I. Endo. "Development of an omni-directional mobile robot with 3 dof decoupling drive mechanism" In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 1925–1930, Nagoya, Mai 1995.
- [Ast95] A. Astolfi. "Exponential stabilization of a car-like vehicle" In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 1391–1396, Nagoya, Mai 1995.
- [BC93] G. Bastin and G. Campion. "Motion planning for wheeled mobile robots a simple feedback control approach" In Proc. European Control Conf. (ECC), pages 1925–1929, Groningue, 1993.
- [BNP87] E. Bakker, L. Nyborg, and H.B. Pacejka. "Tyre modeling for use in vehicle dynamics studies". In Congrès International de la Société des ingénieurs de l'automobile (SAE), pages 2.190–2.204, Février 1987.
- [Bou92] F. Boustany. "Commande non linéaire adaptative de systèmes mécaniques de type pont roulant. Stabilisation frontière d'E.D.P." Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, Octobre 1992.
- [BRM91] A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, and N.H. McClamroch. "Control and stabilization of nonholonomic caplygin dynamic systems". In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 1127–1132, Brighton, Décembre 1991.
- [BRM92] A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, and N.H. McClamroch. "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems" IEEE Trans. on Automatic Control, 37(11):1746–1757, Novembre 1992.
- [Bro83] R.W. Brockett. "Asymptotic stability and feedback stabilization". In Brockett, Millmann & Sussmann, editor, *Differential geometric control theory*, pages 181–191. Birkäuser Boston, 1983.
- [BS95] A. Bicchi and R. Sorrentino. "Dexterous manipulation through rolling". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 452–457, Nagoya, Mai 1995.
- [BTS93] L. Bushnell, D. Tilbury, and S. Sastry. "Steering three-input chained form nonholonomic systems using sinusoids : the fire truck example". In Proc. European Control Conf. (ECC), pages 1432–1437, Groningue, 1993.
- [BTS95] L. Bushnell, D. Tilbury, and S. Sastry. "Steering three-input nonholonomic systems the fire truck example" International Journal of Robotics Research, 14(4):366–381, Août 1995.
- [CA92] J-M. Coron and B. d'Andréa-Novel. "Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems. Application to mobile robots" In Proc. IFAC Conf. on Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS), pages 649–654, Bordeaux, Juin 1992.

- [CAB91] G. Campion, B. d'Andréa-Novel, and G. Bastin. "Modeling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 1184-1189, Brighton, Décembre 1991.
- [Car81] J. Carr. "Applications of centre manifold theory" volume 35 of "applied mathematical sciences" Springer Verlag, 1981
- [CB89] G. Campion and G. Bastin. "On adaptive linearizing control of omnidirectional mobile robots" In Proc. MTNS Symposium, pages 531-538, Amsterdam, Juin 1989.
- [CBA93] G. Campion, G. Bastin, and B. d'Andréa-Novel. "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 462-469, Atlanta, Mai 1993. à paraître dans IEEE Trans. on Robotics & Automation 1996.
- [Cha89] B. Charlet. "Sur quelques problèmes de stabilisation robuste des systèmes non linéaires" Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, Novembre 1989.
- [CN94] C. Canudas de Wit and A.D. NDoudi-Likoho. "Nonlinear control for a convoy-like vehicle". In Proc. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pages 257-262, Capri, Septembre 1994.
- [CNM94] C. Canudas de Wit, A.D. NDoudi-Likoho, and A. Micaelli. "Feedback control for a train-like vehicle" In Proc. IEEE. Conf. on Robotics & Automation, pages 14-19, San Diego, Mai 1994.
- [CNS95] W.J. Chung, Y. Nakamura, and O.J. Sørđalen. "Prototyping a nonholonomic manipulator" In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 2029-2036, Nagoya, Mai 1995.
- [Cor92a] J-M. Coron. "Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift" Mathematics of Control, Signals and Systems, 5:295-312, 1992.
- [Cor92b] J-M. Coron. "Links between local controllability and local continuous stabilization" In Proc. IFAC Conf. on Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS), pages 477-482, Bordeaux, Juin 1992.
- [CS92] C. Canudas de Wit and O.J. Sørđalen. "Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints" IEEE Trans. on Automatic Control, 37(11):1791-1797, Novembre 1992.
- [DD93] A. De Luca and M.D. Di Benedetto. "Control of nonholonomic systems via dynamic compensation" Kybernetika, 29(6):593-608, 1993.
- [DM85] J. Descusse and C.H. Moog. "Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems" International Journal of Control, 42(6):1387-1398, 1985.

- [DO94] A. De Luca and G. Oriolo. "Nonholonomy in redundant robots under kinematic inversion" In Proc. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pages 179-184, Capri, Septembre 1994.
- [EBS94] O. Egeland, E. Berglund, and O.J. Sørdaalen. "Exponential stabilization of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 20-25, San Diego, Mai 1994.
- [EK92] F. Esfandiari and H.K. Khalil. "Output feedback stabilization of fully linearizable systems" International Journal of Control, 56(5):1007-1037, 1992.
- [Ell69] J.R. Ellis. "Vehicle Dynamics" Business Books, Londres, 1969.
- [Har82] P. Hartman. "Ordinary differential equations" Birkhäuser Boston, 1982.
- [HMC94] T. Hamel, D. Meisel, and A. Charara. "A new robust tracking controller for autonomous vehicles" In Proc. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pages 93-99, Capri, Septembre 1994.
- [HSM83] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. "Global transformations of nonlinear systems" IEEE Trans. on Automatic Control, 28:24-31, 1983.
- [Isi89] A. Isidori. "Nonlinear control systems" Springer Verlag, 1989.
- [JR80] B. Jakubczyk and W. Respondek. "On linearisation of control systems" Bulletin de l'académie des sciences de Pologne, 28:517-522, 1980.
- [KGM93] A. Kapitanovsky, A. Goldenberg, and J. Mills. "Design of smooth dynamic feedback for stabilization of nonholonomic systems". In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 965-970, San Antonio, Décembre 1993.
- [Kha92] H.K. Khalil. "Nonlinear systems" MacMillan Publishing Company, New York, 1992.
- [KIR83] A.J. Krener, A. Isidori, and W. Respondek. "Partial and robust linearisation by feedback" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 126-130, 1983.
- [KKMN91] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, and T. Noguchi. "A stable tracking control method for a nonholonomic mobile robot". In Proc. IEEE Conf. on Intelligent Robots & Systems (IROS), pages 1236-1241, Osaka, Novembre 1991.
- [KKO86] P. Kokotovic, H.K. Khalil, and J. O'Reilly. "Singular perturbation methods in control analysis and design" Academic Press, Londres, 1986.
- [KP92] S.M. Killough and F.G. Pin. "Design of an omnidirectional and holonomic wheeled platform prototype". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 84-90, Nice, Mai 1992.

- [LA95] W. Leroquais and B. d'Andréa-Novel. "Transformation of the kinematic models of restricted mobility wheeled mobile robots with a single platform into chained forms" accepté pour la Conf. IEEE. on Decision & Control, Décembre 1995.
- [Lau93] J-P. Laumond. "Controllability of a multibody mobile robot" IEEE Trans. on Robotics & Automation, 9(6):755-763, Décembre 1993.
- [Lee92] A.Y. Lee. "A preview steering autopilot control algorithm for four-wheel-steering passenger vehicle" Trans. of the ASME Journal of dynamic systems, measurement, and control, 114:401-408, Septembre 1992.
- [Mar86] R. Marino. "On the largest feedback linearizable subsystem" Systems & Control Letters, 6:345-351, 1986.
- [Mar93a] P. Martin. "A geometric sufficient condition for flatness of systems with m inputs and $m + 1$ states" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 3431-3436, San Antonio, Décembre 1993.
- [Mar93b] P. Martin. "Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats" Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1993.
- [MAT92] A. Micaelli, B. d'Andréa-Novel, and B. Thuilot. "Modeling and asymptotic stabilization of mobile robots equipped with two or more steering wheels". In Proc. ICAR-CV Conf., pages RO:13.5.1-13.5.5, Singapour, Septembre 1992.
- [M'C95] R.T. M'Closkey. "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems" Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, Pasadena, 1995.
- [MCH91] M.G. Mehrabi, R.M.H. Cheng, and A. Hemami. "Control of a wheeled mobile robot with double steering". In Proc. IEEE Conf. on Intelligent Robots & Systems (IROS), pages 806-810, Osaka, Novembre 1991.
- [MG88] R.H. Middleton and G.C. Goodwin. "Adaptive computed torque control for rigid link manipulations" Systems & Control Letters, 10(1):9-16, Janvier 1988.
- [MM93] R.T. M'Closkey and R.M. Murray. "Nonholonomic systems and exponential convergence some analysis tools" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 943-948, San Antonio, Décembre 1993.
- [MN87] P.F. Muir and C.P. Neuman. "Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 1772-1778, Raleigh, 1987.
- [MS91] R.M. Murray and S.S. Sastry. "Steering nonholonomic systems in chained form" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 1121-1126, Brighton, Décembre 1991.

- [MS93] R.M. Murray and S.S. Sastry. "Nonholonomic motion planning steering using sinusoids" IEEE Trans. on Automatic Control, 38(5):700-716, Mai 1993.
- [MS94] A. Micaelli and C. Samson. "Trajectory tracking for two-steering wheels mobile robots". In Proc. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pages 249-256, Capri, Septembre 1994
- [MS95] P. Morin and C. Samson. "Time-varying exponential stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls" Rapport de recherche 2493, INRIA/Sophia-Antipolis, Février 1995.
- [MSPJ94] P. Morin, C. Samson, J-B. Pomet, and Z-P. Jiang. "Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls" Rapport de recherche 2275, INRIA/Sophia-Antipolis, Mai 1994.
- [MT92] N. Matsumoto and M. Tomizuka. "Vehicle lateral velocity and yaw rate control with two independent control inputs" Trans. of the ASME Journal of dynamic systems, measurement, and control, 114:606-613, Décembre 1992.
- [Mur90] R.M. Murray. "Robotic control and nonholonomic motion planning" Thèse de Doctorat, Université de Californie, Berkeley, Décembre 1990.
- [MWS92] R.M. Murray, G. Walsh, and S.S. Sastry. "Stabilization and tracking for nonholonomic control systems using time-varying state feedback" In Proc. IFAC Conf. on Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS), pages 182-187, Bordeaux, Juin 1992.
- [NR88] H. Nijmeijer and W. Respondek. "Dynamic input-output decoupling of non linear control systems" IEEE Trans. on Automatic Control, 33(11):1065 1070, Novembre 1988.
- [NS90] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. "Nonlinear dynamical control systems" Springer Verlag, 1990.
- [NS92] Y. Nakamura and S. Savant. "Nonlinear tracking control of autonomous underwater vehicles". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages A4-A9, Nice, Mai 1992.
- [ON91] G. Oriolo and Y. Nakamura. "Free-joint manipulators motion control under second-order nonholonomic constraints". In Proc. IEEE Conf. on Intelligent Robots & Systems (IROS), pages 1248-1253, Osaka, Novembre 1991.
- [PAC91] L. Praly, B. d'Andréa-Novel, and J-M. Coron. "Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems" IEEE Trans. on Automatic Control, 36(10):1177-1181, Octobre 1991.
- [PBPJ91] L. Praly, G. Bastin, J-B. Pomet, and Z.P. Jiang. "Adaptive stabilization of nonlinear systems" In Kokotovic, editor, *Foundations of adaptive control*,

- "Lecture notes in control and information sciences", pages 347-443. Springer Verlag, 1991
- [Pom92] J-B. Pomet. "*Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift*" Systems & Control Letters, 18(2):147-158, Février 1992.
- [Pom94] J-B. Pomet. "*A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization*" Rapport de recherche 2312, INRIA/Sophia-Antipolis, Juillet 1994.
- [PS93] J-B. Pomet and C. Samson. "*Time-varying exponential stabilization of non-holonomic systems in power form*" Rapport de recherche 2126, INRIA/Sophia-Antipolis, Décembre 1993.
- [PTBC92] J-B. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin, and G. Campion. "*A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots*". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 129-134, Nice, Mai 1992.
- [Ren93] P. Renaut. "*Commande des robots mobiles*" Rapport technique, ENSMP/CESAME-UCL-Louvain-la-Neuve, Septembre 1993.
- [RFLM93] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, and P. Martin. "*Flatness, motion planning and trailer systems*" In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 2700-2705, San Antonio, Décembre 1993.
- [Ros92] L. Rosier. "*Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector fields*" Systems and control letters, 19(6):467-473, 1992.
- [SA90] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. "*Mobile robot control. Part 1 Feed-back control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space*" Rapport de recherche 1288, INRIA/Sophia-Antipolis, Octobre 1990.
- [SA91] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. "*Feedback stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot*". In Proc. IEEE Conf. on Intelligent Robots & Systems (IROS), pages 1242-1247, Osaka, Novembre 1991
- [Sac93] E. Sachot. "*Commande par retour d'état de robot mobile en tenant compte des glissements*". Rapport technique, ENSMP/CEA-DPSA-STR-Fontenay-aux-Roses, Juin 1993.
- [Sam90] C. Samson. "*Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart*" In Canudas, editor, *Advanced robot control*, volume 162 of "Lecture notes in control and information sciences" pages 125-151. Springer Verlag, Novembre 1990.
- [Sam92] C. Samson. "*Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot*". In Proc. ICAR-CV Conf., pages RO:13.1.1-13.1.5, Singapour, Septembre 1992.

- [Sam93] C. Samson. "Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots" *International Journal of Robotics Research*, 12(1):55-64, Février 1993.
- [Sam95] C. Samson. "Control of chained systems. Applications to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots" *IEEE Trans. on Automatic Control* 40(1):64-77, Janvier 1995.
- [SDE93] O.J. Sørдалen, M. Dalsmo, and O. Egeland. "An exponentially convergent control law for a nonholonomic underwater vehicle". In *Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation*, pages 790-795, Atlanta, Mai 1993.
- [SL88] J.-J. E. Slotine and W. Li. "Adaptive manipulator control a case study" *IEEE Trans. on Automatic Control*, 33(11):995-1003, Novembre 1988.
- [SNC94] O.J. Sørдалen, Y. Nakamura, and W.J. Chung. "Design of a nonholonomic manipulator". In *Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation*, pages 8-13, San Diego, Mai 1994.
- [Sø93a] O.J. Sørдалen. "Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form" In *Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation*, pages 382-387, Atlanta, Mai 1993.
- [Sø93b] O.J. Sørдалen. "Feedback control of nonholonomic mobile robots" Thèse de Doctorat, Institut Norvégien de Technologie, Trondheim, Février 1993.
- [Sus87] H.J. Sussmann. "A general theorem on local controllability" *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(1):158-194, Janvier 1987.
- [Sus91] H. Sussmann. "Local controllability and motion planning for some classes of systems with drift". In *Proc. IEEE Conf on Decision & Control*, pages 1110-1114, Brighton, Décembre 1991.
- [TAM92a] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Analysis of the rate of convergence of some time-varying feedback laws". Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Novembre 1992.
- [TAM92b] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Etude bibliographique sur la commande par retour d'état de robots mobiles à 3 roues" Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Janvier 1992.
- [TAM92c] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Modeling and asymptotic stabilization of mobile robots equipped with two or more steering wheels" Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Juillet 1992.
- [TAM93] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Modeling and state feedback control of mobile robots equipped with several steering wheels" Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Juillet 1993.

- [TAM94] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Modélisation et commande de robots mobiles à roues - cas où les hypothèses de roulement sans glissement ne sont plus vérifiées". Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Juin 1994.
- [TAM95a] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Commande des robots mobiles dans le cas où les hypothèses de roulement pur sans glissement ne sont plus vérifiées". Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Décembre 1995.
- [TAM95b] B. Thuilot, B. d'Andréa-Novel, and A. Micaelli. "Modeling and state feedback control of mobile robots equipped with several steering wheels". en instance de publication par IEEE Trans. on Robotics & Automation, 1995.
- [TC91] H-S. Tan and Y-K Chin. "Vehicle traction control - variable-structure control approach". Trans. of the ASME - Journal of dynamic systems, measurement, and control, 113:223-230, Juin 1991.
- [Tee92] A.R. Teel. "Feedback stabilization - nonlinear solutions to inherently nonlinear problems". Thèse de Doctorat, Université de Californie, Berkeley, Juin 1992.
- [Thu91] B. Thuilot. "Simulation et commande de robots mobiles". Rapport de DEA, LAG-INPG, Grenoble, Septembre 1991.
- [Thu94] B. Thuilot. "Commande des systèmes non-linéaires". Cours pour les élèves-ingénieurs, 3^{ème} année, ENSTA, Paris, Septembre 1994.
- [Til94] D. Tilbury. "Exterior differential systems and nonholonomic motion planning". Thèse de Doctorat, Université de Californie, Berkeley, 1994.
- [TMS95] D. Tilbury, R.M. Murray, and S.S. Sastry. "Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form". IEEE Trans. on Automatic Control, 40(5):802-819, Mai 1995.
- [TMW92] A.R. Teel, R.M. Murray, and G. Walsh. "Nonholonomic control systems from steering to stabilization with sinusoids". In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 1603-1609, Tucson, Décembre 1992.
- [Tr 92] F. Trébuchet. "Simulateur du comportement en 2D de VERI". Rapport technique, CEA-DPSA-STR, Fontenay-aux-Roses, Novembre 1992.
- [TSBS94] D. Tilbury, O. Sørndalen, L. Bushnell, and S. Sastry. "A multi-steering trailer system - conversion into chained form using dynamic feedback". In Proc. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pages 159-164, Capri, Septembre 1994.
- [WA95] M. West and H. Asada. "Design and control of ball wheel omnidirectional vehicles". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 1931-1938, Nagoya, Mai 1995.

- [WB93] G.C. Walsh and L.G. Bushnell. "*Stabilization of multiple input chained form control systems*". In Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, pages 959–964, San Antonio, Décembre 1993.
- [WSE95] K.Y. Wichlund, O.J. Sørvalen, and O. Egeland. "*Control properties of underactuated vehicles*". In Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation, pages 2009–2014, Nagoya, Mai 1995.
- [Yos66] T. Yoshizawa. "*Stability theory by Lyapunov's second method*" volume 9. The mathematical society of Japan, Tokyo, 1966.